ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 16 | April 1936 | Heft 2

Inhalt:

Seite

Hauptaufsätze. M. Schuler: Erzeugung von Oberflächenwellen durch schwingende Körper . . 65

R. Kaiser: Rechnerische und experimentelle Ermittlung der Durchbiegungen und Spannungen von quadratischen Platten bei freier Auflagerung an den Rändern, gleichmäßig verteilter Last und großen Ausbiegungen 73

M. Ray: Vibration of an infinite elliptic cylinder in a viscous liquid 99

R. Höger: Schwingungen elastischer Seile 109

St. Neumark: Beschleunigungswiderstand geradlinig bewegter Körper in einer idealen Flüssigkeit 117

Kleine Mitteilungen. Willers: Prüfung der Einheitlichkeit eines Massenfabrikates 121

Reinitzhuber: Über den Einfluß der Vorspannung des Fahrbahnbelages einer Brücke auf deren Längsträger 121

Melikov: Über die Grenzen der Anwendbarkeit einer Formel der Festigkeitslehre 125

Buchbesprechungen. Malkin: Festigkeitsberechnung rotierender Scheiben. — Bošniaković: Technische Thermodynamik. — Joos: Lehrbuch der Theoretischen Physik. — Heisenberg, Schrödinger, Dirac: Die mod. Atomtheorie. — Timpe und Riebesell: Archiv für mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung. — Moeller und Werr: Elektrotechnik. — Weiß: Einführung in die Liniengeometrie und Kinematik. — Weiter eingegangene Bücher 126

Nachrichten 128

HAUPTAUFSÄTZE

Erzeugung von Oberflächenwellen durch schwingende Körper.

Von *M. Schuler* in Göttingen.

Vortrag, gehalten in der Hauptversammlung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik in Stuttgart am 26. September 1935.

1. Die Aufgabe. Im folgenden will ich von einigen Arbeiten berichten, die auf meine Anregung im Institut für angewandte Mechanik der Universität Göttingen in den letzten Jahren ausgeführt wurden. Die Aufgabe bestand darin, die Tauchschwingungen von Körpern an der Oberfläche des Wassers zu untersuchen. Die Schwingbewegung soll senkrecht zu der Flüssigkeitsoberfläche stehen. Der Körper wird dann beim Schwingen periodisch Flüssigkeit verdrängen und dadurch Oberflächenwellen bei der Flüssigkeit hervorrufen. Dadurch wird sowohl die Schwingungszeit T als auch das Dämpfungsdekrement δ des Schwingers gegenüber der Schwingung in Luft geändert. Auch bei reibungsloser Flüssigkeit wächst δ beim Eintauchen des Körpers in Flüssigkeit, da Energie durch die erzeugten laufenden Wellen der Flüssigkeit weggetragen wird. Ferner wird sich die Schwingungszeit, bei deren Berechnung die statischen Auftriebskräfte der Flüssigkeit schon berücksichtigt seien, dadurch ändern, daß Flüssigkeitsteilchen mitschwingen. Dies geschieht bei einem Schwinger an der Flüssigkeitsoberfläche durch Ausbildung von stehenden Flüssigkeitswellen.

Die Aufgabe läuft also darauf hinaus, die Wellen zu studieren, die von einem Tauchschwinger erzeugt werden.

Ich habe vor zwei Jahren in demselben Kreise über den Umschlag der laufenden Wellen in stehende Wellen gesprochen [1]. Bei kleinen Amplituden und niederen Frequenzen des Schwingers entstehen laufende Wellen von der Frequenz des Schwingers, die von dem Schwinger weglaufen. Ihr Wellenkamm liegt parallel mit der Eintauchlinie des Körpers. Steigert man die Amplitude oder die Frequenz des Schwingers, so tritt plötzlich ein Wellenumschlag ein. Statt der laufenden Welle erhält man eine stehende von der doppelten Frequenz des Schwingers. Sie steht senkrecht zu der laufenden Welle; der Wellenkamm steht also senkrecht zur Körperoberfläche. Während ich vor zwei Jahren von diesem Wellenumschlag sprach, will ich heute nur die laufende Welle behandeln und Ihnen kurz berichten, was unsere Versuche und Rechnungen hier ergeben haben. Als wir vor drei Jahren das Problem anfaßten, lagen fast keine Vorarbeiten auf diesem Gebiete vor. Deshalb haben wir uns auf reine Tauchschwingungen und auf das ebene Problem beschränkt. Ich möchte erwähnen, daß inzwischen die Arbeit von Burgers [2] erschienen ist, welche die horizontalen Schwingungen einer Querwand beim Eintauchen unter die Flüssigkeitsoberfläche behandelt. Da dieses gerade die Aufgabe ist, die wir nicht behandelt haben, so ergänzen sich also beide Arbeiten gegenseitig.

2. Versuchsanordnung. Um einen Einblick in die Vorgänge zu gewinnen, wurde zuerst eine Anzahl von Versuchen gemacht. Die Versuchsanordnung ist in Abb. 1 skizziert. Wir haben einen Rahmen (d), der um die Achse k_2 drehbar gelagert ist und auf der andern Seite im Punkte k_1 durch Federn ($f_1; f_2$) abgestützt ist. Der Punkt k_1 macht also bei einem Anstoß vertikale Schwingbewegungen. Hier wird der Versuchskörper Q eingehängt, der teilweise in die Flüssigkeit eintaucht. Ein Schreibstift (T) registriert auf der laufenden Trommel (Tr) die Schwingungskurve, die dann nach Schwingungszeit und Dämpfung ausgewertet werden kann. Der Schreibstift (St) gibt die Zeitmarken. Man erhält bei dieser Anordnung nach einem einmaligen Anstoß freie Schwingungen. Man kann aber auch den Rahmen durch einen Exzenter, der von einem Motor angetrieben wird, in Schwingungen versetzen, deren Amplitude und Frequenz während des Versuches konstant bleibt. Es ergeben sich dann erzwungene Schwingungen der Flüssigkeit von gegebener Frequenz. Um ein ebenes Problem zu erhalten, wurde ein langer schmaler Wassertank verwendet[1]); die Versuchsmodelle reichten von einer Tankwand zur andern und hatten überall gleichen Querschnitt. Bei symmetrischen Modellen liefen dann nach rechts und links dieselben Wellen weg. Diese wurden photographiert und dann ausgewertet. Abb. 2 zeigt Ihnen eine solche laufende Welle und das Maßstabnetz, das zum Zwecke der Auswertung an der einen Tankwand befestigt war und mit photographiert wurde. So konnte Wellenlänge und Wellenamplitude bestimmt werden. Vor allem mußte man dafür sorgen, daß am Ende des Tanks die laufenden Wellen nicht reflektiert wurden. Deshalb wurden Beruhigungssiebe eingebaut, die sich ganz gut bewährten. Bei den erzwungenen Schwingungen mußte immer der stationäre Zustand abgewartet werden, d. h. die beim Einsetzen der Schwingung sich überlagernden freien Schwingungen der Wasseroberfläche mußten abgeklungen sein. Die Zeit hierzu ist aber bei der kleinen Eigenreibung des Wassers schon recht lang. Zudem bedeutet jede Frequenzschwankung des Schwingers eine Störung des Wellenbildes. Die Forderung läuft also darauf hinaus, bei allen erzwungenen Schwingungen die Frequenz des Schwingers möglichst konstant zu halten. Dies gelang durch Einschalten eines großen Schwungrades vor die Welle des erregenden Exzenters. Die Frequenz wurde stroboskopisch mittels einer Glimmlampe, die an das Wechselstromnetz angeschlossen war, gemessen. Diese Meßmethode hat sich sehr gut bewährt; Schwankungen von $\pm \frac{1}{2}\,\%$ konnten noch deutlich abgelesen werden. Die Versuche wurden von A. Dimpker angefangen und von H. Holstein fortgeführt.

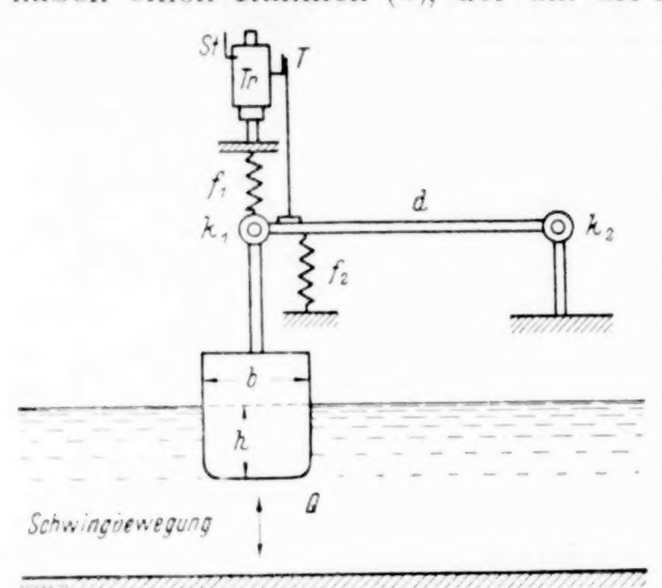


Abb. 1. Skizze der Versuchsanordnung. Q ist der Körper, der die Tauchschwingungen ausführt.



Abb. 2. Bild einer laufenden Welle.

3. Der Schwinger an der Oberfläche des Wassers und die Plattentheorie. Die ersten Versuche stellten fest, daß die Wellenamplitude stets proportional der Amplitude des Schwingers ist, so daß wir im folgenden stets von einer auf die Schwingeramplitude 1 „bezogenen Wellenamplitude" sprechen können. Ferner erfolgt die Dämpfung des Schwingers praktisch nur durch die in den Wellen fortgeleitete Energie. Die Zähigkeit des Wassers und die Wirbelbildungen kommen hiergegen nicht in Betracht. Wir brauchen also nur wirbelfreie Bewegungen zu untersuchen. Zuerst wurden Schwingungen mit einem Keil ausgeführt bei verschiedenen Eintauchtiefen h und verschiedenen Frequenzen ω [4]. Dabei wurde das logarithmische Dekrement der Schwingung δ gemessen und, wie die Froudesche Ähnlichkeit dies verlangt,

$$\frac{\delta}{h^2} = f(\omega^2 \cdot h)$$

[1]) Maße des Tanks: Länge = 320 cm, Breite = 69 cm, Tiefe = 30 cm.

aufgetragen. Das Ergebnis zeigt Abb. 3. Die Meßpunkte fallen tatsächlich mit Meßgenauigkeit auf eine Funktionskurve, die allerdings bei kleinem ω oder auch bei kleinem h sehr stark ansteigt. Daraus sieht man, daß die Zusammenhänge nicht einfach sind. Der Versuch ist aber auch ein Beweis, daß die Energieverluste nur durch Oberflächenwellen entstehen. Ein zweiter Versuch zeigte noch klarer, daß hier offenbar eine verwickelte Beziehung mit der Eintauchtiefe des Körpers besteht. Ein schwingender Kreiszylinder wurde verschieden tief in Wasser eingetaucht und dann das logarithmische Dekrement δ der Schwingung bestimmt. Die Meßergebnisse sind in Abb. 4 dargestellt abhängig von der Eintauchtiefe h. Kurvenparameter ist die Frequenz ω. Zuerst sehen wir ein starkes Anwachsen von δ. Dies ist selbstverständlich, denn bei größeren Eintauchtiefen wird bei der gleichen Schwingungsamplitude immer mehr Wasser verdrängt. Dann folgt aber bei weiterem Eintauchen ein starkes Abfallen, obwohl die Wasserverdrängung noch weiter wächst. Alle Kurven zeigen dasselbe Bild. Dies konnte nur so gedeutet werden, daß dieselbe schwingende Körperfläche an der Wasseroberfläche viel größere Wellen erzeugt als eine Strecke unter der Wasseroberfläche.

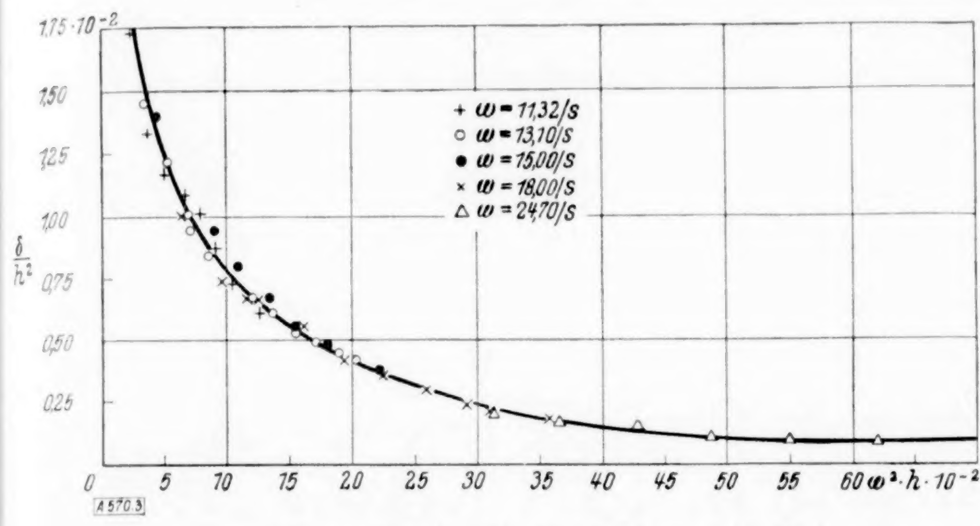


Abb. 3. Froudesche Ähnlichkeit beim Keil.

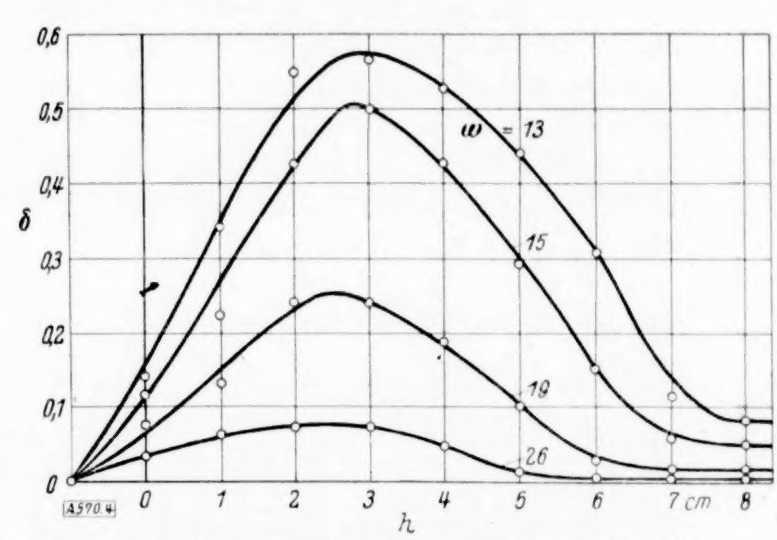


Abb. 4. Abhängigkeit des Dämpfungsdekrementes δ von der Eintauchtiefe h beim Zylinder. (Parameter: Frequenz ω.)

Um nun einfachere Verhältnisse zu bekommen, die man auch rechnerisch leichter verfolgen konnte, wählte Dimpker einen Körper an der Wasseroberfläche, und zwar eine schwingende Platte von der Breite b. Dann konnte die Eintauchtiefe $h = 0$ gesetzt werden, und die bezogene Amplitude war nur eine Funktion von ω.

$$\bar{A} = f(\omega).$$

Zudem waren lokale Oberflächenstörungen des Wassers bereits mathematisch behandelt und lagen in guter Darstellung in dem Buche von Lamb vor. Aus diesen Ansätzen rechnete Dimpker die „schwingende Linie an der Wasseroberfläche". D. h. eine Linie, die periodische Drücke auf die Wasseroberfläche ausübt. Er erhielt für große Entfernungen vom Schwinger laufende Wellen mit der bezogenen Amplitude:

$$\bar{A}_{x \to \infty} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{2 g \varrho} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (1).$$

Dabei beachte man die Beziehung:

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega^2}{g} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (2).$$

Die Koordinate x liegt horizontal in Richtung des Wellenlaufes. Ihr Nullpunkt liegt im Mittelpunkt des Schwingers. Es bedeutet: λ = Wellenlänge; ω = Frequenz des Schwingers; g = Erdschwere; ϱ = spezifische Masse der Flüssigkeit. Die Amplitude ist hier bezogen auf ein störendes Druckintegral von der Größe 1. Gl. (1) gilt nur für den stationären Fall, daß der Schwinger schon unendlich lange schwingt.

Nun galt es, von der schwingenden Linie durch Integration zur schwingenden Platte von der Breite b überzugehen. Dazu muß man aber die Druckverteilung $p = f(x)$ unter der schwingenden Platte kennen, die man bei der Integration einzusetzen hat. Diese Druckfunktion nahmen wir von der schwingenden Platte in unendlich ausgedehnter Flüssigkeit (Abb. 5). Wir haben bekanntlich eine elliptische Druckverteilung, die an beiden Plattenenden Null wird. Dies stimmt mit unserer Oberflächenbedingung überein, wenn die Oberfläche keine Wellen hat. Da wir aber durch die Schwingung gerade Wellen erzeugen, so haben wir hier nur einen Näherungsansatz. Wieweit er brauchbar ist, kann der Versuch entscheiden. Als Integrationsergebnis bekam Dimpker für die bezogene Amplitude der

laufenden Welle in unendlicher Entfernung von der schwingenden Platte die Bessel-Funktion erster Ordnung. Die Gleichung lautet:

$$\underset{x\to\infty}{\bar{A}} = \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{b}{\lambda}\cdot J_1\left(\pi\,\frac{b}{\lambda}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

λ = Wellenlänge; b = Breite der schwingenden Platte.

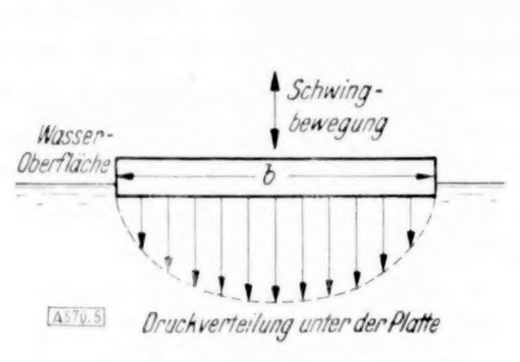


Abb. 5.

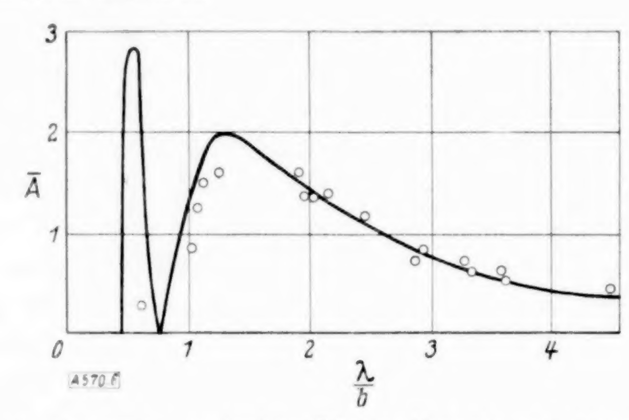


Abb. 6. Vergleich zwischen Plattentheorie und Versuch.

Diese Näherung sei mit „Plattentheorie" bezeichnet. Aus dem Gang der Funktion J_1 erkennt man folgendes: Ist $\lambda \gg b$, d. h. haben wir langsame Frequenzen des Erregers, so ist $\bar{A}$ proportional $\left(\frac{b}{\lambda}\right)^2$. Wächst nun $\frac{b}{\lambda}$, d. h. gehen wir mit den Frequenzen des Schwingers höher, so erhalten wir ein Maximum von $\bar{A}$, eine „Resonanzstelle". Dann sinkt bei weiterem Steigern der Frequenz $\bar{A}$ wieder ab, und bei dem Werte $\frac{b}{\lambda} = 1{,}22$ erhalten wir eine Nullstelle. Beliebig große Amplituden des Schwingers können bei der Frequenz, die diesem Werte b/λ entspricht, keine fortlaufenden Wasserwellen erzeugen. Dies deckt sich mit dem Satz: Der Schwinger gibt bei dieser Frequenz keine Energie an das Wasser ab. Wird die Frequenz weiter erhöht, dann kommt wieder ein Maximum von $\bar{A}$, wieder eine Nullstelle usf.

Wie deckt sich nun dieses Rechenergebnis mit dem Versuch? In Abb. 6 sieht man die nach Gl. (3) gerechnete Amplitude als Funktion von λ/b aufgetragen. Die eingetragenen Punkte bedeuten die experimentellen Messungen. Man sieht hier die gute Übereinstimmung bei längeren Wellen. Auch das Maximum und die erste Nullstelle werden noch verhältnismäßig gut wiedergegeben. Aber bei weiterer Steigerung der Frequenz versagte der Versuch, weil der Wellenumschlag von laufender zu stehender Welle eintrat. Wir können also sagen, daß die unendlich vielen Resonanzstellen, die man aus Gl. (3) errechnet, sicher nicht zu verwirklichen sind, dagegen die erste Resonanzstelle durch Gl. (3) gut wiedergegeben wird.

4. Der Schwinger unter der Oberfläche des Wassers und die Quellentheorie. Die Arbeiten von Dimpker beschränkten sich auf einen Schwinger an der Wasseroberfläche. Im Anschluß daran hat Holstein untersucht, was geschieht, wenn die schwingende Fläche eine Tiefe h unter der Wasseroberfläche liegt. Zum Versuch verwendete er einen Quader (s. Abb. 1), der vertikale Schwingungen ausführte und dessen Unterkante in verschiedene Tiefen h unter die

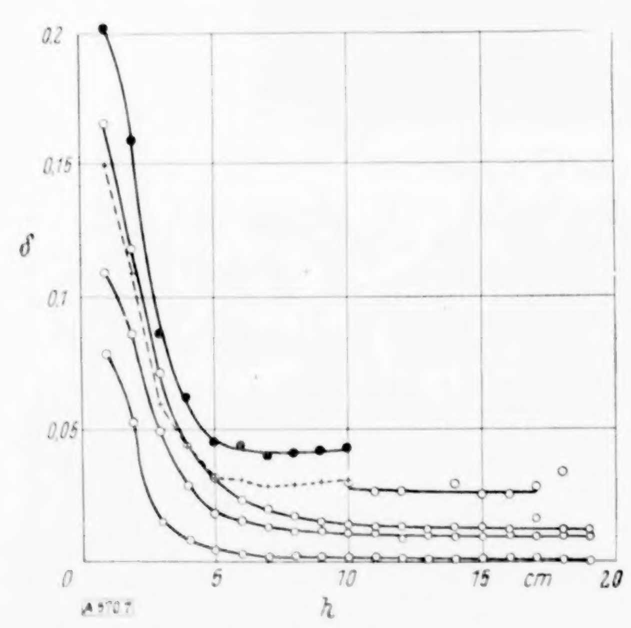


Abb. 7. Abhängigkeit des Dämpfungsdekrementes δ von der Eintauchtiefe h bei einem Quader von 12 cm Breite.

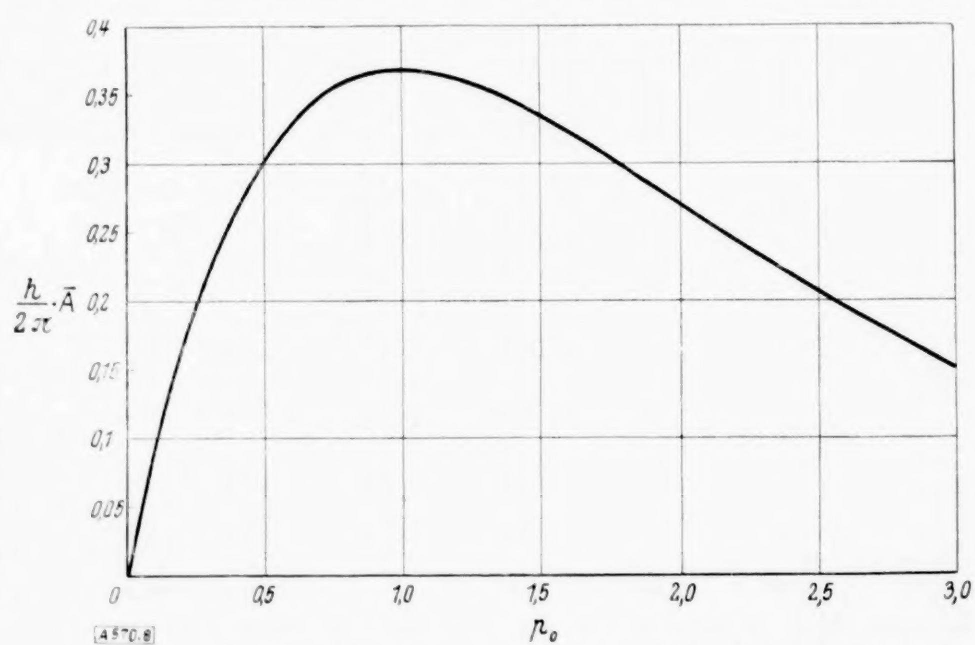


Abb. 8. Die Funktionskurve gibt die Abhängigkeit zwischen der Amplitude der laufenden Welle $\bar{A}$, der Frequenz ω und der Eintauchtiefe h für die periodische Quelle. $p_0 = \frac{h\,\omega^2}{g}$.

Wasseroberfläche gelegt werden konnte. Die Wellenerregung kann nur von der Unterfläche des Quaders kommen, welche bei der Schwingung periodisch Wasser verdrängt und ansaugt, während die Seitenflächen keine Wellen erregen können. Es muß dann die erzeugte Wasserwelle eine Funktion von der Frequenz ω und der Eintauchtiefe h sein. Für die „bezogene" Wellenamplitude erhält man also $\bar{A} = f(\omega; h)$. Die Versuche zeigten, daß tatsächlich keine anderen Funktionsabhängigkeiten vorlagen. Aber die ersten Versuche bestätigten gleich die große Abhängigkeit von h. Abb. 7 zeigt das Dämpfungsdekrement δ eines freischwingenden Quaders abhängig von der Eintauchtiefe h aufgetragen. Die einzelnen Kurven sind Aufnahmen bei verschiedenen Frequenzen. Man sieht, daß δ bei kleinen Eintauchtiefen sehr stark anwächst. D. h. aber, daß die weglaufende Welle, die den Energieentzug bewirkt, bei großer Eintauchtiefe sehr viel kleiner ausfällt als bei kleiner Eintauchtiefe.

Um mathematisch das Problem zu behandeln, wählte Holstein eine periodisch atmende Quellinie, die in der Tiefe h unter der Wasseroberfläche angeordnet ist. Diese Quelle entspricht offenbar einem Quader von unendlich kleiner Breite b und trotzdem endlicher Pumpmenge. Es zeigte sich aber, daß man mit diesem Ansatz noch im Widerspruch mit der Oberflächenbedingung stand. Es mußte im Abstand $-h$ von der Oberfläche eine Senke angeordnet werden mit der gleichen Ergiebigkeit der Quelle, die das von der Quelle ausgestoßene Wasser stets verschluckt. Auf diesem Wege war eine strenge Bestimmung der Oberflächenwelle möglich. Die Lösung führte auf ein komplexes Exponential-Integral. Besonders einfach wird die Formel wieder für die weglaufende Welle im Unendlichen, die uns besonders interessiert. Ihre bezogene Amplitude wird:

$$\bar{A}_{x \to \infty} = \frac{4\pi^2}{\lambda} \cdot e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Für $h = 0$ wird die Exponentialfunktion $= 1$, und damit geht Gl. (4) in Gl. (1) über, wenn man die Atmung der Quelle durch ein entsprechendes Druckintegral ersetzt. Gl. (4) ergibt ein exponentielles Abklingen der Wellenamplitude mit der Eintauchtiefe h bei festgehaltener Frequenz des Schwingers. Das Abklingen fällt aber bei verschiedenen Frequenzen sehr verschieden aus, da $\omega^2 = \frac{2\pi g}{\lambda}$. Setzt man

$$\frac{2\pi h}{\lambda} = \frac{h\omega^2}{g} = p_0, \quad \text{so wird} \quad \bar{A} \cdot \frac{h}{2\pi} = p_0 \cdot e^{-p_0}.$$

Man kann also die Abhängigkeit $\bar{A} = f(\omega; h)$ durch eine einzige Funktionskurve darstellen, indem man $\bar{A} \cdot \frac{h}{2\pi}$ über p_0 aufträgt. Abb. 8 zeigt die Kurve.

Bisher haben wir nur die Form der Wasserwellen in großer Entfernung von dem Schwinger behandelt. Nun zeige ich Ihnen in folgenden beiden Bildern noch die Form der Wellenoberfläche in unmittelbarer Nähe der atmenden Quelle. Sie wurde durch Auswerten des Exponential-Integrals berechnet. Abb. 9 ist für den Wert $p_0 = 3$ gezeichnet, d. h. λ und $2h$ sind von derselben Größenordnung. Der Nullpunkt der Abbildung liegt senkrecht über der Quelle auf der störungsfreien Wasseroberfläche. Kurve I ist die nach Gl. (4) berechnete Wellenoberfläche im Unendlichen. Sie ist eine reine Sinuskurve. Kurve II gibt die wirkliche Form

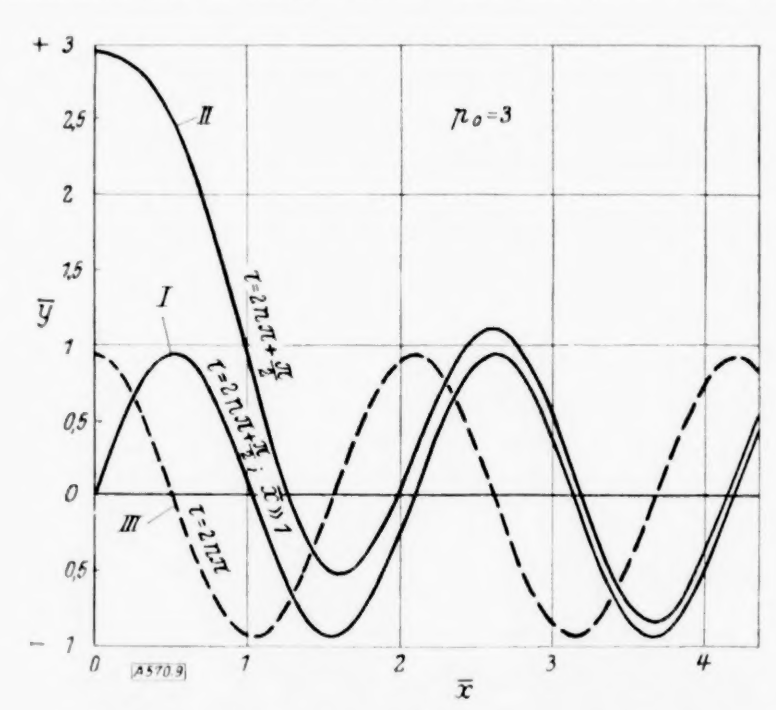


Abb. 9. Form der Wasserwelle über der periodischen Quelle für den Parameter $p_0 = 3$.

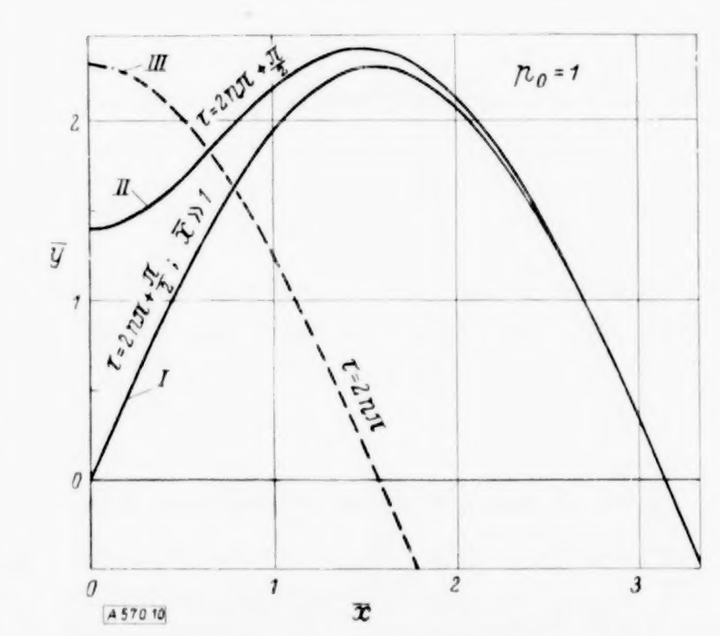


Abb. 10. Form der Wasserwelle über der periodischen Quelle für den Parameter $p_0 = 1$.

der Oberfläche wieder. Über dem Quellpunkt selbst ist die Abweichung natürlich groß, aber zwei Wellenlängen vom Quellpunkt ab kann man sicher mit einer reinen Sinuskurve und der Amplitude nach Gl. (4) rechnen.

Für $\frac{\pi}{2}$ Phase früher gilt Kurve III. Es ist dann kein Unterschied zwischen der Welle über dem Quellpunkt und der Welle nach Gl. (4) vorhanden, ein Beweis, daß die überlagerte Störwelle im Quellpunkt 0° Phasenverschiebung gegen die laufende Welle hat. In Abb. 10 sehen wir dieselben Kurven für den Fall $p_0 = 1$, d. h. großes λ oder kleines h. Wir sehen hier kaum mehr einen Unterschied zwischen der laufenden Welle und der Welle im Quellpunkt. Man beachte, daß die Abb. 10 viermal so groß gezeichnet ist als die Abb. 9, um den kleinen Unterschied noch deutlich zu machen. Damit ist die Auswertung der periodischen Quelle gelöst[2].

Hat man nun einen Quader von der Breite b, dessen Boden beim Schwingen die Wasserverdrängung verursacht, so hat man einen Quellstreifen über die ganze Quaderbreite b zu verteilen und dann darüber zu integrieren. Dabei sind aber auch die Quadergrenzen als Grenzbedingungen einzuführen. Bisher ist diese strenge Lösung noch nicht gelungen. Deshalb haben wir zwei Näherungslösungen versucht.

Man ersetzt den Quader durch eine Quellinie, der man dieselbe Atmungsmenge zumißt, wie die Verdrängungsmenge des Quaders bei einer Halbschwingung beträgt. Durch einfache Umrechnung erhält man die Näherungsformel für die bezogene Amplitude der laufenden Welle im Unendlichen:

$$\bar{A}_{x \to \infty} = 2\pi \frac{b}{\lambda} \cdot e^{-2\pi \frac{h}{\lambda}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Diese Näherung sei mit „Quellentheorie" bezeichnet. Macht man hier den Grenzübergang für $h = 0$, so erhält man

$$\bar{A}_{x \to \infty} = 2\pi \frac{b}{\lambda} .$$

Dieses Ergebnis steht im völligen Gegensatz zu Gl. (3) der Plattentheorie, die ja für $h = 0$ abgeleitet wurde. Macht man nämlich hier den Grenzübergang $b \ll \lambda$, so erhält man

$$\bar{A}_{x \to \infty} = \frac{\pi^3}{4} \frac{b^2}{\lambda} \qquad \text{für } b \ll \lambda .$$

Die Entscheidung, ob die Näherung Gl. (5) oder Gl. (3) brauchbarer ist, bringt der Versuch. Es zeigt sich, daß für kleine h Gl. (5) viel zu große Werte von A ergibt. Man darf also hier sicher den Grenzübergang $h = 0$ nicht machen. Ist dagegen $h > b$, so ergibt die einfache Gl. (5) schon sehr gute Näherungen. Aber auch bei Gl. (3) darf man den Übergang $b \ll \lambda$ nicht machen. Denn bei dem Ansatz wurde ja die Wirkung der Wellen vernachlässigt, die natürlich an den Plattenrändern am stärksten sein wird. Lasse ich nun $b \to 0$ gehen, so besteht die Platte nur mehr aus zwei Rändern, und die eingesetzte Druckfunktion wird deshalb sicher nicht mehr genügend mit der wirklichen Druckfunktion übereinstimmen.

5. Die Energiegleichung und die Quadertheorie. Ferner versuchte Holstein auf Anregung von Prof. Prandtl eine Näherung auf dem Energiesatz aufzubauen: „Die vom Quader auf das Wasser übertragene Energie muß stets gleich sein der durch die laufende Welle weggetragenen Energie." Diese weggetragene Energie kann man anschreiben, da ja die Form der Welle aus den früheren Überlegungen bekannt ist. Die Energie beträgt für eine volle Periode:

$$E_1 = \pi g^2 \varrho \cdot \frac{A^2}{\omega^2} .$$

Beim Quader kann nur von der schwingenden Bodenfläche Energie auf das Wasser übertragen werden. Sie beträgt ebenfalls für eine volle Periode gerechnet:

$$E_2 = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \int_0^T p\, v \cdot d\sigma \cdot dt .$$

[2]) Die bei den Abb. 9 und 10 gewählten Koordinaten bedeuten:

$\bar{x} = \frac{x}{h}$; $\quad \bar{y} = \frac{\eta \cdot h}{R A_0}$; $\quad x$ = horizontaler Abstand von der Quellinie;
η = Koordinate der Welle gerechnet von dem ungestörten Wasserspiegel;
h = Tiefe der Quellinie unter dem ungestörten Wasserspiegel;
R = Radius des atmenden Kreisringes; $\quad A_0$ = Atmungsamplitude;
$4\pi R A_0$ = Atmungsmenge auf 1 cm Quellinie.

Wasseroberfläche gelegt werden konnte. Die Wellenerregung kann nur von der Unterfläche des Quaders kommen, welche bei der Schwingung periodisch Wasser verdrängt und ansaugt, während die Seitenflächen keine Wellen erregen können. Es muß dann die erzeugte Wasserwelle eine Funktion von der Frequenz ω und der Eintauchtiefe h sein. Für die „bezogene" Wellenamplitude erhält man also $\bar{A} = f(\omega; h)$. Die Versuche zeigten, daß tatsächlich keine anderen Funktionsabhängigkeiten vorlagen. Aber die ersten Versuche bestätigten gleich die große Abhängigkeit von h. Abb. 7 zeigt das Dämpfungsdekrement δ eines freischwingenden Quaders abhängig von der Eintauchtiefe h aufgetragen. Die einzelnen Kurven sind Aufnahmen bei verschiedenen Frequenzen. Man sieht, daß δ bei kleinen Eintauchtiefen sehr stark anwächst. D. h. aber, daß die weglaufende Welle, die den Energieentzug bewirkt, bei großer Eintauchtiefe sehr viel kleiner ausfällt als bei kleiner Eintauchtiefe.

Um mathematisch das Problem zu behandeln, wählte Holstein eine periodisch atmende Quellinie, die in der Tiefe h unter der Wasseroberfläche angeordnet ist. Diese Quelle entspricht offenbar einem Quader von unendlich kleiner Breite b und trotzdem endlicher Pumpmenge. Es zeigte sich aber, daß man mit diesem Ansatz noch im Widerspruch mit der Oberflächenbedingung stand. Es mußte im Abstand $-h$ von der Oberfläche eine Senke angeordnet werden mit der gleichen Ergiebigkeit der Quelle, die das von der Quelle ausgestoßene Wasser stets verschluckt. Auf diesem Wege war eine strenge Bestimmung der Oberflächenwelle möglich. Die Lösung führte auf ein komplexes Exponential-Integral. Besonders einfach wird die Formel wieder für die weglaufende Welle im Unendlichen, die uns besonders interessiert. Ihre bezogene Amplitude wird:

$$\bar{A}_{x \to \infty} = \frac{4\pi^2}{\lambda} \cdot e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Für $h = 0$ wird die Exponentialfunktion $= 1$, und damit geht Gl. (4) in Gl. (1) über, wenn man die Atmung der Quelle durch ein entsprechendes Druckintegral ersetzt. Gl. (4) ergibt ein exponentielles Abklingen der Wellenamplitude mit der Eintauchtiefe h bei festgehaltener Frequenz des Schwingers. Das Abklingen fällt aber bei verschiedenen Frequenzen sehr verschieden aus, da $\omega^2 = \frac{2\pi g}{\lambda}$. Setzt man

$$\frac{2\pi h}{\lambda} = \frac{h\,\omega^2}{g} = p_0, \quad \text{so wird} \quad \bar{A} \cdot \frac{h}{2\pi} = p_0 \cdot e^{-p_0}.$$

Man kann also die Abhängigkeit $\bar{A} = f(\omega; h)$ durch eine einzige Funktionskurve darstellen, indem man $\bar{A} \cdot \frac{h}{2\pi}$ über p_0 aufträgt. Abb. 8 zeigt die Kurve.

Bisher haben wir nur die Form der Wasserwellen in großer Entfernung von dem Schwinger behandelt. Nun zeige ich Ihnen in folgenden beiden Bildern noch die Form der Wellenoberfläche in unmittelbarer Nähe der atmenden Quelle. Sie wurde durch Auswerten des Exponential-Integrals berechnet. Abb. 9 ist für den Wert $p_0 = 3$ gezeichnet, d. h. λ und $2h$ sind von derselben Größenordnung. Der Nullpunkt der Abbildung liegt senkrecht über der Quelle auf der störungsfreien Wasseroberfläche. Kurve I ist die nach Gl. (4) berechnete Wellenoberfläche im Unendlichen. Sie ist eine reine Sinuskurve. Kurve II gibt die wirkliche Form

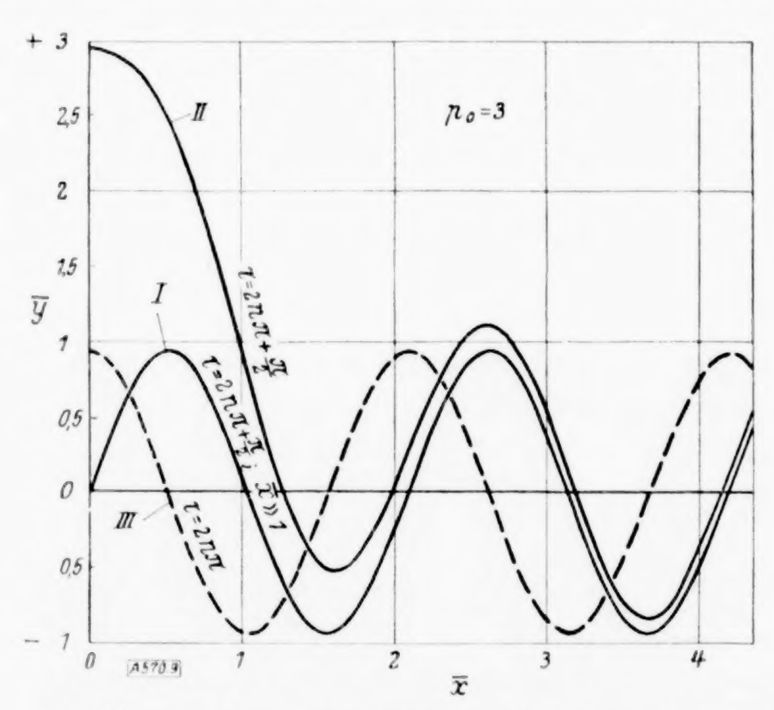


Abb. 9. Form der Wasserwelle über der periodischen Quelle für den Parameter $p_0 = 3$.

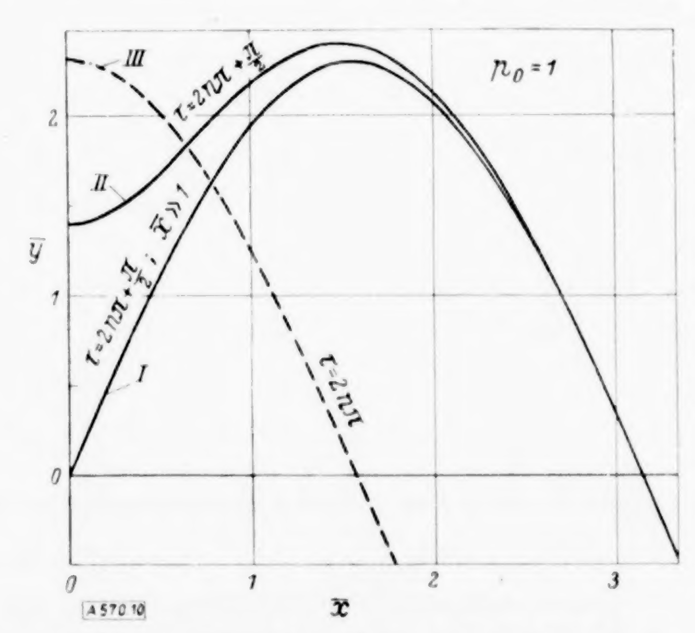


Abb. 10. Form der Wasserwelle über der periodischen Quelle für den Parameter $p_0 = 1$.

der Oberfläche wieder. Über dem Quellpunkt selbst ist die Abweichung natürlich groß, aber zwei Wellenlängen vom Quellpunkt ab kann man sicher mit einer reinen Sinuskurve und der Amplitude nach Gl. (4) rechnen.

Für $\frac{\pi}{2}$ Phase früher gilt Kurve III. Es ist dann kein Unterschied zwischen der Welle über dem Quellpunkt und der Welle nach Gl. (4) vorhanden, ein Beweis, daß die überlagerte Störwelle im Quellpunkt 0° Phasenverschiebung gegen die laufende Welle hat. In Abb. 10 sehen wir dieselben Kurven für den Fall $p_0 = 1$, d. h. großes λ oder kleines h. Wir sehen hier kaum mehr einen Unterschied zwischen der laufenden Welle und der Welle im Quellpunkt. Man beachte, daß die Abb. 10 viermal so groß gezeichnet ist als die Abb. 9, um den kleinen Unterschied noch deutlich zu machen. Damit ist die Auswertung der periodischen Quelle gelöst[2]).

Hat man nun einen Quader von der Breite b, dessen Boden beim Schwingen die Wasserverdrängung verursacht, so hat man einen Quellstreifen über die ganze Quaderbreite b zu verteilen und dann darüber zu integrieren. Dabei sind aber auch die Quadergrenzen als Grenzbedingungen einzuführen. Bisher ist diese strenge Lösung noch nicht gelungen. Deshalb haben wir zwei Näherungslösungen versucht.

Man ersetzt den Quader durch eine Quellinie, der man dieselbe Atmungsmenge zumißt, wie die Verdrängungsmenge des Quaders bei einer Halbschwingung beträgt. Durch einfache Umrechnung erhält man die Näherungsformel für die bezogene Amplitude der laufenden Welle im Unendlichen:

$$\bar{A}_{x \to \infty} = 2\pi \frac{b}{\lambda} \cdot e^{-2\pi \frac{h}{\lambda}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

Diese Näherung sei mit „Quellentheorie" bezeichnet. Macht man hier den Grenzübergang für $h = 0$, so erhält man

$$\bar{A}_{x \to \infty} = 2\pi \frac{b}{\lambda}.$$

Dieses Ergebnis steht im völligen Gegensatz zu Gl. (3) der Plattentheorie, die ja für $h = 0$ abgeleitet wurde. Macht man nämlich hier den Grenzübergang $b \ll \lambda$, so erhält man

$$\bar{A}_{x \to \infty} = \frac{\pi^3}{4} \left(\frac{b}{\lambda}\right)^2 \qquad \text{für } b \ll \lambda .$$

Die Entscheidung, ob die Näherung Gl. (5) oder Gl. (3) brauchbarer ist, bringt der Versuch. Es zeigt sich, daß für kleine h Gl. (5) viel zu große Werte von A ergibt. Man darf also hier sicher den Grenzübergang $h = 0$ nicht machen. Ist dagegen $h > b$, so ergibt die einfache Gl. (5) schon sehr gute Näherungen. Aber auch bei Gl. (3) darf man den Übergang $b \ll \lambda$ nicht machen. Denn bei dem Ansatz wurde ja die Wirkung der Wellen vernachlässigt, die natürlich an den Plattenrändern am stärksten sein wird. Lasse ich nun $b \to 0$ gehen, so besteht die Platte nur mehr aus zwei Rändern, und die eingesetzte Druckfunktion wird deshalb sicher nicht mehr genügend mit der wirklichen Druckfunktion übereinstimmen.

5. Die Energiegleichung und die Quadertheorie. Ferner versuchte Holstein auf Anregung von Prof. Prandtl eine Näherung auf dem Energiesatz aufzubauen: „Die vom Quader auf das Wasser übertragene Energie muß stets gleich sein der durch die laufende Welle weggetragenen Energie." Diese weggetragene Energie kann man anschreiben, da ja die Form der Welle aus den früheren Überlegungen bekannt ist. Die Energie beträgt für eine volle Periode:

$$E_1 = \pi g^2 \varrho \cdot \frac{A^2}{\omega^2}.$$

Beim Quader kann nur von der schwingenden Bodenfläche Energie auf das Wasser übertragen werden. Sie beträgt ebenfalls für eine volle Periode gerechnet:

$$E_2 = \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \int_0^T p\, v \cdot d\sigma \cdot dt .$$

[2]) Die bei den Abb. 9 und 10 gewählten Koordinaten bedeuten:

$\bar{x} = \frac{x}{h}$; $\bar{y} = \frac{\eta \cdot h}{R A_0}$; x = horizontaler Abstand von der Quellinie;
η = Koordinate der Welle gerechnet von dem ungestörten Wasserspiegel;
h = Tiefe der Quellinie unter dem ungestörten Wasserspiegel;
R = Radius des atmenden Kreisringes; A_0 = Atmungsamplitude;
$4\pi R A_0$ = Atmungsmenge auf 1 cm Quellinie.

σ ist die Koordinate der Bodenfläche in der x-Richtung, σ_0 und σ_1 die Grenzen des Bodens. T ist die Schwingungszeit und v die Geschwindigkeit des schwingenden Quaders. Diese Größen sind bekannt. $p = f(t; \sigma)$ ist der Druck am Boden des Quaders. Diese Funktion ist unbekannt. Um trotzdem zu einer Näherung zu kommen, nimmt Holstein die Druckfunktion der im Unendlichen laufenden Welle. Die Quellentheorie hat gezeigt, daß sich die Wellen im Unendlichen und die Wellen an der Störungsstelle nicht viel unterscheiden und zudem der Unterschied eine Welle mit 90° Phasenverschiebung ist, die deshalb keinen Beitrag zu E_2 liefern kann. Dies ist streng richtig für die Quelle. Bei einem Quader mit endlicher Breite wird aber das Wellenbild etwas anders aussehen, und wir müssen uns klar sein, daß deshalb diese Lösung nur eine Näherung darstellt. Das Gleichsetzen von E_1 und E_2 ergibt für die bezogene Wellenamplitude im Unendlichen die Bedingung:

$$\bar{A}_{x \to \infty} = 2 \cdot \sin \pi \frac{b}{\lambda} \cdot e^{-2\pi \frac{h}{\lambda}} \qquad (6).$$

Diese Näherung sei mit „Quadertheorie" bezeichnet. Die Formel deckt sich mit Gl. (5) der Quellentheorie, nur steht in Gl. (6) der Sinus $\pi b/\lambda$ statt des Winkels. Für $b \ll \lambda$, d. h kleine Quaderbreite, gehen beide Lösungen ineinander über. Aber bei vergleichbarem b und λ ergibt Gl. (6) etwas ganz anderes. Sie hat nämlich Maxima und Nullstellen; diese letzteren bei ganzzahligen Verhältnissen b/λ. Wir erhalten also hier bestimmte Frequenzen, bei denen keine laufenden Wellen erregt werden. Dies deckt sich mit dem Ergebnis unserer Gl. (2). Aber ein großer Unterschied ist doch vorhanden; denn die Sinusfunktion hat die Nullstellen bei kleineren Werten des Arguments als die Bessel-Funktion.

Wieweit die Näherungsformeln der Quellen- und Quadertheorie brauchbar sind, kann der Versuch entscheiden. Ich bringe Ihnen deshalb die gerechneten und gemessenen Wellenamplituden abhängig von der Schwingungszeit des Schwingers für verschiedene Eintauchtiefen (h) bei konstanter Breite (b) des Schwingers. Bei großen Eintauchtiefen ($h = 10$ cm $= 5/6\,b$) stimmt die Form der Kurve gut mit den Meßwerten überein. Quellentheorie und Quadertheorie unterscheiden sich nicht viel. Die gerechneten Werte liegen durchweg etwas höher als die gemessenen (Abb. 11). Bei kleineren Eintauchtiefen ($h = 4$ cm $= b/3$) unterscheiden sich Quellen- und Quadertheorie merklich (Abb. 12). Die Meßwerte liegen meistens

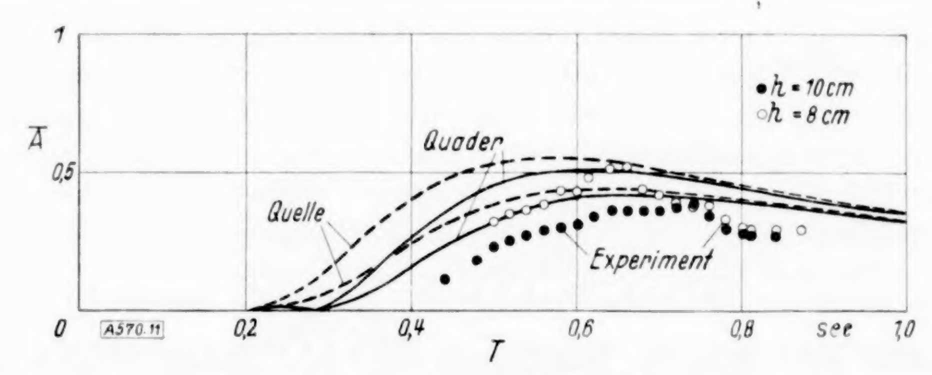


Abb. 11. Vergleich zwischen Quellentheorie und Quadertheorie mit dem Versuch. Quaderbreite: $b = 12$ cm. Die tieferliegenden Kurven gelten für $h = 10$ cm, die höherliegenden für $h = 8$ cm.

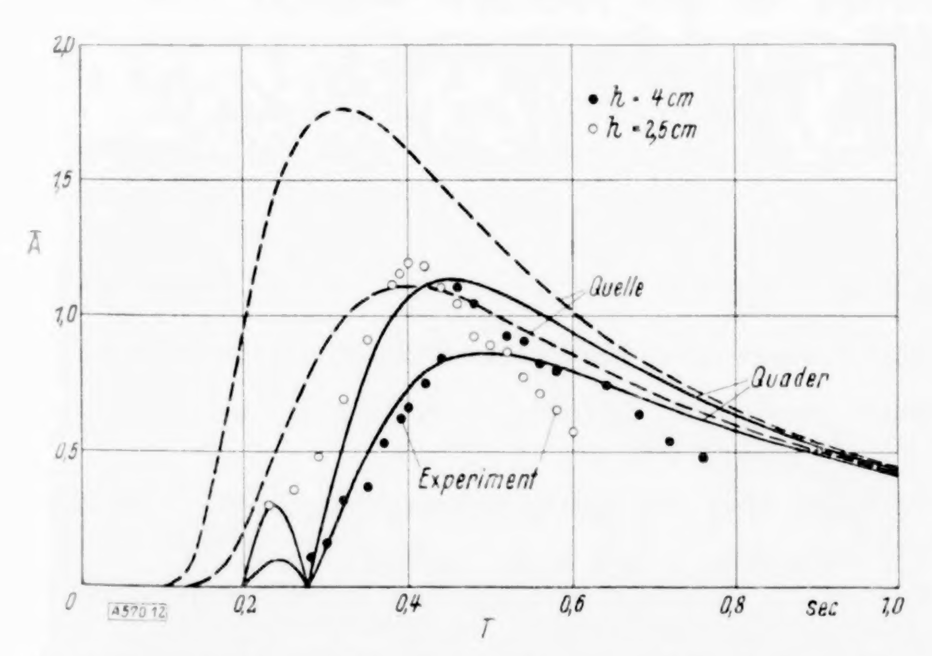


Abb. 12. Vergleich zwischen Quellentheorie und Quadertheorie mit dem Versuch. Quaderbreite: $b = 12$ cm. Die tieferliegenden Kurven gelten für $h = 4$ cm, die höherliegenden für $h = 2,5$ cm.

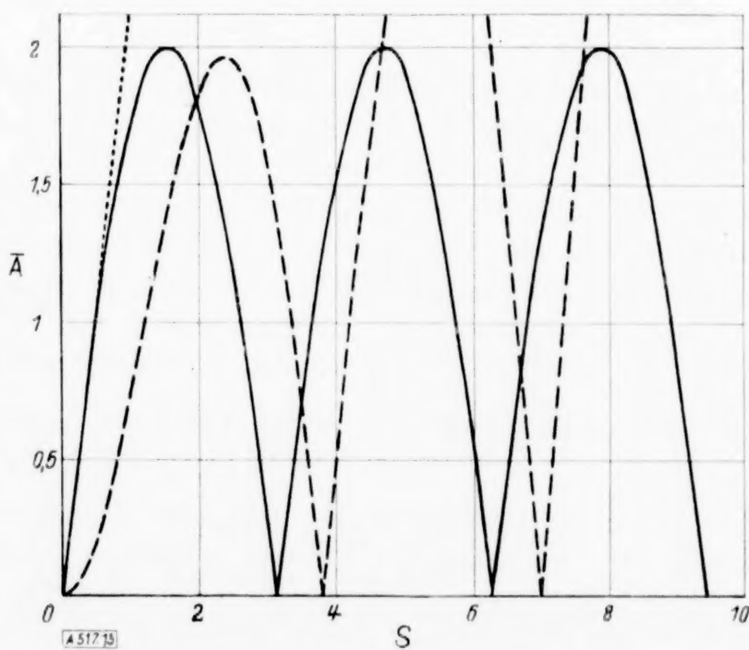


Abb. 13. Funktionskurven der Plattentheorie — — — —, Quadertheorie ———— und Quellentheorie . . . ., abhängig von $S = \frac{c}{\lambda}$ für $h = O$.

dazwischen. Bei noch kleineren Eintauchtiefen ($h = 2{,}5$ cm $= b/5$) ist die Quellentheorie unbrauchbar, während die Quadertheorie noch einigermaßen die Art der Funktion wiedergibt. Die gemessene „Resonanz" ist aber schärfer und liegt bei kürzeren Schwingungszeiten, als dies die Quadertheorie ergibt. In Abb. 13 zeige ich, daß gerade eine solche Resonanzverschiebung die Plattentheorie für $h/b \to 0$ verlangt.

6. Vergleich und Kritik der Ergebnisse. Zum Schluß zeige ich in Abb. 13 die Plattenfunktion, die Quaderfunktion und die Quellenfunktion für den Sonderfall $h = 0$, abhängig von $S = \pi \cdot \frac{b}{\lambda}$ aufgetragen. Die Quellenfunktion schießt sofort aus dem Bereich der Abbildung heraus. Sie ist, wie wir früher schon feststellten, für $h \ll 1$ unbrauchbar. Das erste Maximum von Quader- und Plattenfunktion ist etwa gleich hoch, doch ist die Kurve der Plattentheorie nach rechts, d. h. zu höheren Frequenzen verschoben. Eine solche Verschiebung der Resonanz haben wir auch bei den Experimenten für kleines h festgestellt. Bei größerem S, d. h. bei höheren Frequenzen, werden die Kurvendifferenzen immer größer. Doch wissen wir ja, daß den Kurven nur bis zur ersten Nullstelle physikalische Bedeutung zukommt, weil dann der Wellenumschlag eintritt. Man muß sich klar sein, woher diese Differenzen der Näherungslösungen kommen: Bei der Plattentheorie ging man von der Strömung um den Körper aus und vernachlässigte in erster Näherung die Wellenbewegung. Bei der Quadertheorie ging man von der Wellenbewegung aus und vernachlässigte in erster Näherung die Störungen durch den endlich ausgedehnten Körper. Die Wirklichkeit wird also zwischen beiden Näherungen liegen. Dort, wo die verschiedenen Näherungsverfahren am meisten divergieren, nämlich bei ganz kurzen Schwingungszeiten, können wir keine Messungen mehr erhalten, denn hier tritt der Wellenumschlag von der laufenden Welle zur stehenden Welle ein. Dies ist natürlich kein Zufall. Kleine Änderungen in den Voraussetzungen des Wellenerregers bringen in diesem Falle völlig andere Wellenbilder. Dies kann so gedeutet werden, daß die laufenden Wellen, die wir gerechnet haben, dynamisch nicht mehr stabil sind. Es muß aber auch betont werden, daß im gezeichneten Falle $h = 0$ die einzelnen Näherungen besonders stark auseinanderlaufen. Dies ist ein Grenzfall, der in Wirklichkeit nicht mehr vorkommen kann. Bei großem h fallen dagegen die verschiedenen Kurven fast zusammen.

Abschließend kann ich also sagen, daß die Berechnung der laufenden Wellen, die bei Tauchschwingungen eines Körpers entstehen, im Falle des ebenen Problems und der stationären Wellenbewegung möglich ist. Für die schwingende Linie ist die Berechnung streng durchgeführt; für den Schwinger von endlicher Breite sind Näherungsformeln angegeben. Man hat bei sehr kleinen Eintauchtiefen (bei breiten Profilen) die Formel der Plattentheorie Gl. (3)), bei größeren Eintauchtiefen (bei schlanken Profilen) die Formel der Quadertheorie zu verwenden. Auch bei sehr kleinem Verhältnis von Quaderbreite zu Wellenlänge $\left(\frac{b}{\lambda} < \frac{1}{10}\right)$ wird die Quadertheorie eine bessere Näherung ergeben. Diese beiden einfachen Formeln geben nur den stationären Fall der Wellenbewegung in großer Entfernung von dem Wellenerreger wieder. Aber diese laufenden Wellen sind für viele technische Aufgaben von besonderer Bedeutung, da sie allein die Energie von dem Schwinger wegtragen. Für die näheren Einzelheiten der Rechnung, die Wellenform in der Nähe des Schwingers und die nichtstationären Fälle verweise ich auf die Dissertationen von A. Dimpker und H. Holstein [5].

Veröffentlichungen.

[1] Schuler, M.: Der Umschlag von Oberflächenwellen. ZAMM **13** (1933), S. 443 bis 446.

[2] Burgers, J. M.: Über die Erregung von Wellen in einem Kanal durch eine bewegte Querwand. ZAMM **13** (1933), S. 67 bis 71.

[3] Dimpker, A.: Über die an der Oberfläche einer Flüssigkeit schwingende Platte. Ann. d. Phys. **19** (1934), S. 225 bis 251.

[4] Dimpker, A.: Über schwingende Körper an der Oberfläche des Wassers. Werft-Reederei-Hafen **15** (1934), S. 15 bis 19.

[5] Holstein, H.: Über Kanalwellen, hervorgerufen durch periodische Bewegungen unter der Wasseroberfläche. Dissertation, Göttingen 1936.

Rechnerische und experimentelle Ermittlung der Durchbiegungen und Spannungen von quadratischen Platten bei freier Auflagerung an den Rändern, gleichmäßig verteilter Last und großen Ausbiegungen.*)

Von *Rudolf Kaiser* in Berlin-Charlottenburg.

Einleitung. Über das Verhalten von Platten bei großen Durchbiegungen ist bisher verhältnismäßig wenig bekannt. Das Problem verdient aber Beachtung, besonders da solche Platten auch in unseren Bauteilen, z. B. bei den Wänden von Schiffen und Flugzeugholmen vorkommen. Die Aufgabe ist zwar rechnerisch und auch experimentell in Angriff genommen worden, aber es sind auf diesem Gebiete bis heute nur bescheidene Fortschritte erzielt[1]. Der Grund liegt darin, daß sowohl die mathematische Lösung als auch der Versuch mit den Randbedingungen der Rechnung große Schwierigkeiten bereiten.

In der vorliegenden Arbeit wird eine sehr dünne, quadratische Platte bei freier Auflagerung und gleichmäßig verteilter Last rechnerisch und auch experimentell behandelt. Die Arbeit verfolgt den Zweck, einen Überblick über die an solchen Platten auftretenden Spannungen und Formänderungen zu geben. Zugleich soll gezeigt werden, wieweit die Grundlagen der Theorie bei großen Ausbiegungen durch den Versuch bestätigt werden.

Die Versuche sind im Institut für Werkstoffkunde der Technischen Hochschule Aachen ausgeführt worden. Seinem Vorsteher, Herrn Prof. Dr.-Ing. Rötscher, sei an dieser Stelle für die Förderung und für das Interesse, das er meiner Arbeit entgegenbrachte, gedankt. Dem VDI bin ich für die geldliche Unterstützung meiner Arbeit zu Dank verpflichtet.

I. Die Grundlagen der Plattentheorie bei großen Ausbiegungen.

1. Einteilung der Platten.

Das Verhalten der Platten wird hauptsächlich bestimmt durch das Verhältnis der Dicke zu den übrigen Abmessungen.

Man unterscheidet gewöhnlich:

a) sehr dünne Platten oder Platten mit großer Ausbiegung,
b) dünne Platten,
c) dicke Platten.

Bei den unter a) und b) angeführten Platten ist die Dicke h klein im Vergleich zu den sonstigen Abmessungen. Ihre Formänderungen und Spannungen lassen sich aus den Verschiebungen der Punkte ihrer Mittelfläche ermitteln. Platten mit sehr großer Durchbiegung biegen sich unter der Last um einen erheblichen Bruchteil von h oder gar um ein Vielfaches von h durch, welches aber doch klein bleibt im Vergleich zu den sonstigen Plattenabmessungen, dünne Platten dagegen nur um einen kleinen Bruchteil von h.

Bei dicken Platten ist die Dicke h vergleichbar mit den Längenabmessungen. Ihre Spannungszustände lassen sich nur aus den Verschiebungen ξ, η, ζ der einzelnen Punkte finden.

2. Die Differentialgleichungen für die Platte mit großen Ausbiegungen.

In dieser Arbeit soll die ebene Platte bei kleinen und großen Ausbiegungen behandelt werden. Wir wollen uns dabei auf die Betrachtung einer quadratischen Platte beschränken, die ringsum frei aufliegt und gleichmäßig verteilte Belastung trägt. Eine Behandlung dieser Aufgabe nach der gewöhnlichen Theorie der dünnen Platte ist nicht möglich, da diese nur so lange ihre Gültigkeit behält, als die Wölbungen sehr klein bleiben gegenüber der Plattendicke. Bei Durchbiegungen, die die Größenordnung der Plattenstärke erreichen, muß man von den Gleichungen der genaueren Theorie ausgehen:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}+E\left\{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right\}=0 \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

$$h\left\{2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right\}+N\left\{\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4}\right\}=p\ ^{2)} \quad \ldots \quad (2).$$

*) Aachener Dissertation. Referent: Prof. Dr. Rötscher, Korreferent: Prof. Dr. Krauß.

[1]) Einen ausführlichen Bericht über die auf dem Gebiete der Platten erzielten Fortschritte findet man veröffentlicht in der Arbeit von L. Föppl: Neuere Fortschritte der technischen Elastizitätstheorie, ZAMM 1921, S. 466.

[2]) Eine Ableitung dieser partiellen Differentialgleichungen findet man z. B. in folgenden Lehrbüchern der Elastizitätslehre: A. Föppl: Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. 5, A. und L. Föppl: Zwang und Drang, Nadai: Die elastischen Platten.

Hierin bedeuten:

x, y die Koordinaten eines Punktes der Plattenmittelfläche,
h die Plattendicke,
p die spezifische Belastung,
ζ die Durchbiegung,
F die Spannungsfunktion,
E den Elastizitätsmodul,
$N = \frac{E m^2 h^3}{12(m^2-1)}$ den Plattenmodul,
m die Poissonsche Zahl.

Gl. (1) stellt eine Beziehung zwischen den Verzerrungen in der Mittelfläche und den Krümmungen her. Gl. (2) drückt das Gleichgewicht an einem Plattenelement in Richtung der Auflast p aus. Entsprechend den beiden Ausdrücken auf ihrer linken Seite kann man sich an jeder Plattenstelle den Druck p in zwei Teile zerlegt denken, von denen der eine die über die ganze Dicke gleichmäßig verteilten Gewölbespannungen σ_{Gx}, σ_{Gy}, τ_{Gz} und der andere die verhältnisgleich mit dem Abstand von der Mittelfläche wachsenden Biegespannungen σ_{Bx}, σ_{By}, τ_{Bz} hervorruft.

Die Gewölbespannungen ergeben sich aus der Spannungsfunktion F durch die Beziehungen

$$\sigma_{Gx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \qquad \sigma_{Gy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \qquad \tau_{Gz} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

und die Biegespannungen im Abstande z von der Mittelfläche der Platte aus den Durchbiegungen durch die Formeln

$$\sigma_{Bx} = -\frac{m E}{m^2-1} z \left\{ m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right\}, \quad \sigma_{By} = -\frac{m E}{m^2-1} z \left\{ m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right\}, \quad \tau_{Bz} = -\frac{m E}{m+1} z \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \, \partial y} \quad (4).$$

Die Gl. (1) und (2) gelten für alle Platten, deren Stärke klein ist im Vergleich zu den sonstigen Maßen, sofern die Dehnungen verhältnisgleich den Spannungen sind, und die Durchbiegungen nirgends die Größenordnung der Längenabmessungen erreichen. Bei der Ableitung der Differentialgleichungen ist die Normalspannung σ_z, welche senkrecht zur Mittelfläche gerichtet ist, vernachlässigt worden, weil sie bei dünnen Platten mit Ausnahme der Bezirke, wo konzentrierte Kräfte angreifen, klein bleibt gegenüber den zur Plattenebene parallel gerichteten Spannungen.

3. Lösung der Aufgabe mit Hilfe der Differenzenrechnung.

Ein analytisches Verfahren zur Lösung der partiellen Differentialgleichungen (1) und (2) ist bisher nicht bekannt. Deshalb muß man hier versuchen, mittels der Differenzenrechnung befriedigende Ergebnisse zu erzielen. Dieser Weg ist für die dünne Platte zuerst von A. Marcus[3]) beschritten worden. H. Hencky[4]) hat das Differenzenverfahren auch auf nichtlineare Gleichungen angewandt und hier für den Sonderfall der eingespannten Platte mit verschwindender Biegesteifigkeit ($N = 0$) gute Ergebnisse erzielt. Wir wollen hier dasselbe Verfahren verwenden, um für die freigelagerte quadratische Platte bei großen Ausbiegungen eine Lösung zu finden. Es ist hier aber nicht, wie bei den Grenzfällen der Platte mit kleinen Durchbiegungen und der biegsamen Haut, möglich, die Differentialgleichungen (1) und (2) unabhängig von sämtlichen speziellen Daten der Aufgabe zu lösen. Denn es ist auf keinerlei Weise möglich, Ansätze für ζ und F zu finden, die aus den Gl. (1) und (2) die Dimensionsgrößen eliminieren. Führt man nämlich dort, wenn a die halbe Plattenseite ist, wie bei der biegsamen Haut, statt x, y, ζ und F die dimensionslosen Variablen

$$u = \frac{x}{a}, \qquad v = \frac{y}{a}, \qquad \zeta' = \zeta \sqrt[3]{\frac{E h}{p a^4}}, \qquad \varphi' = F \sqrt[3]{\frac{h^2}{p^2 a^2 E}}$$

ein, so erkennt man, daß eine Lösung des Gleichungssystems nur möglich ist, wenn in der Differentialgleichung (2) der Ausdruck

$$\frac{m^2}{12(m^2-1)} \left\{ \left(\frac{h}{a}\right)^4 \frac{E}{p} \right\}^{\frac{2}{3}}$$

bekannt ist. Daraus ergibt sich, daß für ein und dieselbe Platte bei großen Ausbiegungen für jede Belastung p eine neue Lösung abgeleitet werden muß. Spaltet man die Differentialgleichung (2) nach den Druckanteilen, die die Gewölbe- und Biegespannungen erzeugen, so erhält man:

[3]) A. Marcus: Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten, J. Springer 1923.

[4]) H. Hencky: Die Berechnung dünner rechteckiger Platten mit verschwindender Biegungssteifigkeit, ZAMM 1921, S. 81 und 423.

$$h\left\{2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right\}=p_G \quad (5),$$

$$N\left\{\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4}\right\}=p_B=p-p_G \quad (6).$$

Die Drücke p_G und p_B sind aber nicht konstant wie die gegebene Belastung p, sondern Funktionen von x und y. Da sie zunächst unbekannt sind, ist eine getrennte Behandlung der Differentialgleichungen unmöglich. Man kann also für eine gegebene Belastung die durch die Wölbung hervorgerufene Reckung bzw. Zusammendrückung der Platte in ihrer Ebene nur im Zusammenhang mit der Biegesteifigkeit betrachten.

Für die rechnerische Lösung ist es vorteilhaft, die Gl. (1), (5) und (6) in dimensionsloser Form zu schreiben. Führt man deshalb die unabhängigen Variablen

$$u=\frac{x}{a},\quad v=\frac{y}{a} \quad (7\,a)$$

und statt ζ, F, σ, p die Funktionen

$$\omega=\frac{\zeta}{h},\quad \varphi=\frac{F}{h^2 E},\quad \sigma^*=\frac{\sigma}{E}\left(\frac{a}{h}\right)^2,\quad p^*=\frac{p}{E}\left(\frac{a}{h}\right)^4 \quad (7\,b)$$

ein, so erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial u^4}+2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial u^2\,\partial v^2}+\frac{\partial^4 \varphi}{\partial v^4}+\left\{\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2}-\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v}\right)^2\right\}=0 \quad (8),$$

$$2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v}\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2}-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}=p_G^* \quad (9),$$

$$\frac{m^2}{m^2-1}\left\{\frac{\partial^4 \omega}{\partial u^4}+2\frac{\partial^4 \omega}{\partial u^2\,\partial v^2}+\frac{\partial^4 \omega}{\partial v^4}\right\}=p_B^*=p^*-p_G^* \quad (10).$$

Setzt man

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}=s \quad (11)$$

und

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2}=M \quad (12),$$

so lauten die Gl. (8) und (10):

$$\frac{\partial^2 s}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial v^2}=\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v}\right)^2-\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} \quad (13),$$

$$\frac{m^2}{m^2-1}\left\{\frac{\partial^2 M}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial v^2}\right\}=p^*-p_G^* \quad (14).$$

Geht man nun von der Differentialrechnung zur Differenzenrechnung über, so erhält man für einen Netzpunkt i, k, wenn $\Delta u=\Delta v=\frac{1}{n}$ die Maschenteilung ist und zur Abkürzung

$$s'=\frac{s}{n^2},\quad M'=\frac{M}{n^2} \quad (15)$$

eingeführt wird an Stelle der Gl. (9) und (11) bis (14) das System:

$$\Delta^2_u s'_{i,k}+\Delta^2_v s'_{i,k}=(\Delta^2_{uv}\,\omega_{i,k})^2-\Delta^2_u\,\omega_{i,k}\,\Delta^2_v\,\omega_{i,k}=-\varkappa \quad (16\,a),$$

$$\Delta^2_u\,\varphi_{i,k}+\Delta^2_v\,\varphi_{i,k}=s'_{i,k} \quad (16\,b),$$

$$2\,\Delta^2_{uv}\,\varphi_{i,k}\cdot\Delta^2_{uv}\,\omega_{i,k}-\Delta^2_u\,\varphi_{i,k}\,\Delta^2_v\,\omega_{i,k}-\Delta^2_v\,\varphi_{i,k}\,\Delta^2_u\,\omega_{i,k}=\frac{p^*_{G\,i,k}}{n^4} \quad (16\,c),$$

$$\Delta^2_u\,M'_{i,k}+\Delta^2_v\,M'_{i,k}=\frac{m^2-1}{m^2}\,\frac{p^*-p^*_{G\,i,k}}{n^4} \quad (16\,d),$$

$$\Delta^2_u\,\omega_{i,k}+\Delta^2_v\,\omega_{i,k}=M'_{i,k} \quad (16\,e).$$

Die Gleichungen sind in der Reihenfolge geschrieben, wie sie bei den Rechnungen benutzt werden. Die in ihnen vorkommenden zweiten Differenzen nach den Richtungen u, v sind, wenn z. B. $\omega_{i,k}$ die Größe ω im Netzpunkt i, k (Abb. 1) ist, durch folgende Ausdrücke definiert:

$$\left.\begin{aligned} \Delta^2_u\, \omega_{i,k} &= \omega_{i+1,k} - 2\,\omega_{i,k} + \omega_{i-1,k} \\ \Delta^2_v\, \omega_{i,k} &= \omega_{i,k+1} - 2\,\omega_{i,k} + \omega_{i,k-1} \\ \Delta^2_{uv}\, \omega_{i,k} &= \frac{1}{4}\left(\omega_{i+1,k+1} + \omega_{i-1,k-1} - \omega_{i+1,k-1} - \omega_{i-1,k+1}\right) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (17).$$

Es genügt aus Symmetriegründen, die Differenzengleichungen für die Netzpunkte eines Achtels der Platte anzuschreiben. Man erhält bei der Maschenweite $\Delta u = \Delta v = \frac{1}{n}$ im ganzen $\frac{(n+1)\,n}{2}$ Gleichungssysteme 16.

Die Anzahl der linearen Gleichungen steigen mit zunehmender Maschenzahl sehr rasch an, und damit werden die Auflösungen desto mühevoller. Man kann daher die Differenzenrechnung praktisch nur für kleine Maschenzahlen anwenden. Die kleinste noch verwendbare Teilung, bei der die Rechnungen sich gerade noch mit einem erträglichen Aufwand an Zeit bewältigen lassen, beträgt ein Achtel der Seitenlänge.

4. Die Grenzbedingungen bei freier Auflagerung.

Zu den Gl. (16) kommen noch die Randbedingungen hinzu, die im vorliegenden Fall der freien Auflagerung sich sehr einfach ausdrücken lassen. Die Platte genügt nämlich auf ihrem Rande den Navierschen Grenzbedingungen

$$\omega = 0, \qquad \Delta\omega = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18),$$

die in der Differenzenrechnung für einen Randpunkt p (s. Abb. 2) sich wie folgt ausdrücken:

$$\omega_p = 0, \qquad M'_p = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19).$$

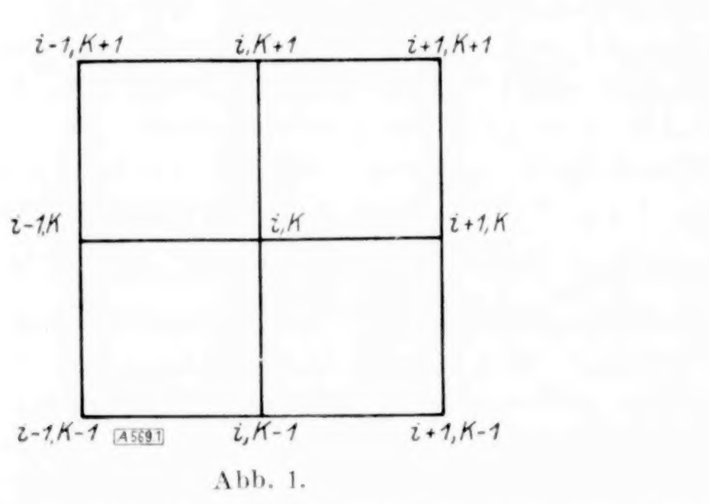


Abb. 1.

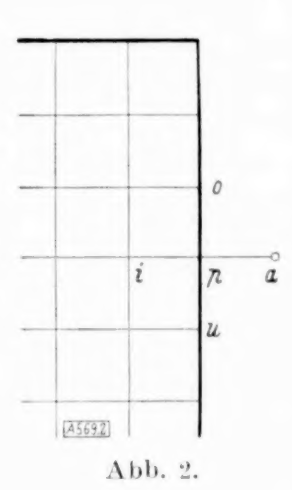


Abb. 2.

Im Gleichungssystem (16) verschwinden also am Rande ω und M'. Dazu kommen noch die Randbedingungen für die Gewölbespannungen. Beschränkt man sich dabei auf den rechten Rand $u = 1$, so erhält man in der Differentialrechnung:

$$\sigma^*_{Gu} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 0, \qquad \tau^*_{Gw} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20).$$

Aus der ersten Bedingung von (20) ergibt sich, daß die Funktion φ am Rande linear von v abhängt. Da sie in den zur Achse symmetrisch gelegenen Punkten gleiche Werte annimmt, folgt weiter, daß sie am Umfange sogar konstant sein muß. Eine Vermehrung der Spannungsfunktion um eine konstante Größe hat nun keinen Einfluß auf die Spannungen. Es kann daher

$$\varphi_p = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

gesetzt werden.

Berücksichtigt man, daß $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$ in den Ecken verschwindet, so ergibt sich aus der zweiten Bedingung von (20)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22).$$

Um den entsprechenden Ausdruck in der Differenzenrechnung bilden zu können, hat man φ über die Ränder hinaus fortzusetzen. Man erhält für einen Punkt p des Randes (s. Abb. 2)

$$\Delta_u \varphi_p = \frac{1}{2}(\varphi_i - \varphi_a) = 0, \qquad \varphi_i = \varphi_a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23).$$

$$h\left\{2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right\}=p_G \quad \text{(5)},$$

$$N\left\{\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}+2\,\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4}\right\}=p_B=p-p_G \quad \text{(6)}.$$

Die Drücke p_G und p_B sind aber nicht konstant wie die gegebene Belastung p, sondern Funktionen von x und y. Da sie zunächst unbekannt sind, ist eine getrennte Behandlung der Differentialgleichungen unmöglich. Man kann also für eine gegebene Belastung die durch die Wölbung hervorgerufene Reckung bzw. Zusammendrückung der Platte in ihrer Ebene nur im Zusammenhang mit der Biegesteifigkeit betrachten.

Für die rechnerische Lösung ist es vorteilhaft, die Gl. (1), (5) und (6) in dimensionsloser Form zu schreiben. Führt man deshalb die unabhängigen Variablen

$$u=\frac{x}{a}, \quad v=\frac{y}{a} \quad \text{(7a)}$$

und statt ζ, F, σ, p die Funktionen

$$\omega=\frac{\zeta}{h}, \quad \varphi=\frac{F}{h^2 E}, \quad \sigma^*=\frac{\sigma}{E}\left(\frac{a}{h}\right)^2, \quad p^*=\frac{p}{E}\left(\frac{a}{h}\right)^4 \quad \text{(7b)}$$

ein, so erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial u^4}+2\,\frac{\partial^4 \varphi}{\partial u^2\,\partial v^2}+\frac{\partial^4 \varphi}{\partial v^4}+\left\{\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}\,\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2}-\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v}\right)^2\right\}=0 \quad \text{(8)},$$

$$2\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v}\,\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v}-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}\,\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2}-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}\,\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}=p^*_G \quad \text{(9)},$$

$$\frac{m^2}{m^2-1}\left\{\frac{\partial^4 \omega}{\partial u^4}+2\,\frac{\partial^4 \omega}{\partial u^2\,\partial v^2}+\frac{\partial^4 \omega}{\partial v^4}\right\}=p^*_B=p^*-p^*_G \quad \text{(10)}.$$

Setzt man

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}=s \quad \text{(11)}$$

und

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2}=M \quad \text{(12)},$$

so lauten die Gl. (8) und (10):

$$\frac{\partial^2 s}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial v^2}=\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\,\partial v}\right)^2-\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2}\,\frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} \quad \text{(13)},$$

$$\frac{m^2}{m^2-1}\left\{\frac{\partial^2 M}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial v^2}\right\}=p^*-p^*_G \quad \text{(14)}.$$

Geht man nun von der Differentialrechnung zur Differenzenrechnung über, so erhält man für einen Netzpunkt i, k, wenn $\Delta u=\Delta v=\frac{1}{n}$ die Maschenteilung ist und zur Abkürzung

$$s'=\frac{s}{n^2}, \quad M'=\frac{M}{n^2} \quad \text{(15)}$$

eingeführt wird an Stelle der Gl. (9) und (11) bis (14) das System:

$$\Delta^2_u\, s'_{i,k}+\Delta^2_v\, s'_{i,k}=(\Delta^2_{uv}\,\omega_{i,k})^2-\Delta^2_u\,\omega_{i,k}\,\Delta^2_v\,\omega_{i,k}=-\varkappa \quad \text{(16a)},$$

$$\Delta^2_u\,\varphi_{i,k}+\Delta^2_v\,\varphi_{i,k}=s'_{i,k} \quad \text{(16b)},$$

$$2\,\Delta^2_{uv}\,\varphi_{i,k}\cdot\Delta^2_{uv}\,\omega_{i,k}-\Delta^2_u\,\varphi_{i,k}\,\Delta^2_v\,\omega_{i,k}-\Delta^2_v\,\varphi_{i,k}\,\Delta^2_u\,\omega_{i,k}=\frac{p^*_{G\,i,k}}{n^4} \quad \text{(16c)},$$

$$\Delta^2_u\, M'_{i,k}+\Delta^2_v\, M'_{i,k}=\frac{m^2-1}{m^2}\,\frac{p^*-p^*_{G\,i,k}}{n^4} \quad \text{(16d)},$$

$$\Delta^2_u\,\omega_{i,k}+\Delta^2_v\,\omega_{i,k}=M'_{i,k} \quad \text{(16e)}.$$

Die Gleichungen sind in der Reihenfolge geschrieben, wie sie bei den Rechnungen benutzt werden. Die in ihnen vorkommenden zweiten Differenzen nach den Richtungen u, v sind, wenn z. B. $\omega_{i,k}$ die Größe ω im Netzpunkt i, k (Abb. 1) ist, durch folgende Ausdrücke definiert:

$$\left.\begin{aligned} \Delta^2_u\, \omega_{i,k} &= \omega_{i+1,k} - 2\,\omega_{i,k} + \omega_{i-1,k} \\ \Delta^2_v\, \omega_{i,k} &= \omega_{i,k+1} - 2\,\omega_{i,k} + \omega_{i,k-1} \\ \Delta^2_{uv}\, \omega_{i,k} &= \frac{1}{4}\,(\omega_{i+1,k+1} + \omega_{i-1,k-1} - \omega_{i+1,k-1} - \omega_{i-1,k+1}) \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (17).$$

Es genügt aus Symmetriegründen, die Differenzengleichungen für die Netzpunkte eines Achtels der Platte anzuschreiben. Man erhält bei der Maschenweite $\Delta u = \Delta v = \frac{1}{n}$ im ganzen $\frac{(n+1)\,n}{2}$ Gleichungssysteme 16.

Die Anzahl der linearen Gleichungen steigen mit zunehmender Maschenzahl sehr rasch an, und damit werden die Auflösungen desto mühevoller. Man kann daher die Differenzenrechnung praktisch nur für kleine Maschenzahlen anwenden. Die kleinste noch verwendbare Teilung, bei der die Rechnungen sich gerade noch mit einem erträglichen Aufwand an Zeit bewältigen lassen, beträgt ein Achtel der Seitenlänge.

4. Die Grenzbedingungen bei freier Auflagerung.

Zu den Gl. (16) kommen noch die Randbedingungen hinzu, die im vorliegenden Fall der freien Auflagerung sich sehr einfach ausdrücken lassen. Die Platte genügt nämlich auf ihrem Rande den Navierschen Grenzbedingungen

$$\omega = 0, \qquad \Delta\omega = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (18),$$

die in der Differenzenrechnung für einen Randpunkt p (s. Abb. 2) sich wie folgt ausdrücken:

$$\omega_p = 0, \qquad M'_p = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (19).$$

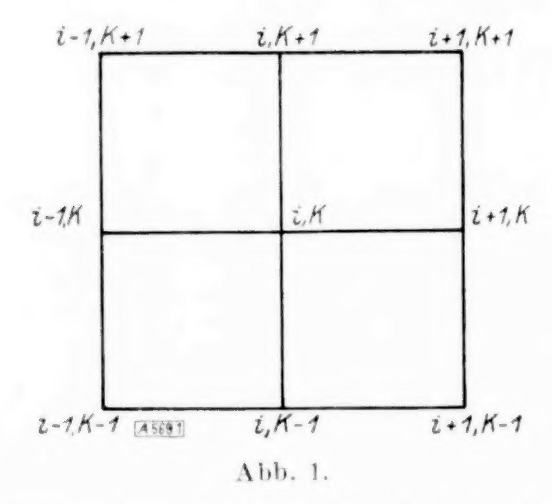


Abb. 1.

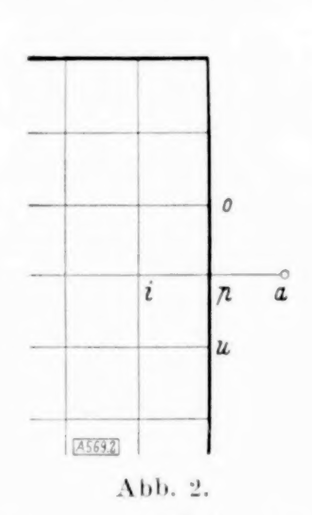


Abb. 2.

Im Gleichungssystem (16) verschwinden also am Rande ω und M'. Dazu kommen noch die Randbedingungen für die Gewölbespannungen. Beschränkt man sich dabei auf den rechten Rand $u = 1$, so erhält man in der Differentialrechnung:

$$\sigma^*_{Gu} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 0, \qquad \tau^*_{Gw} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (20).$$

Aus der ersten Bedingung von (20) ergibt sich, daß die Funktion φ am Rande linear von v abhängt. Da sie in den zur Achse symmetrisch gelegenen Punkten gleiche Werte annimmt, folgt weiter, daß sie am Umfange sogar konstant sein muß. Eine Vermehrung der Spannungsfunktion um eine konstante Größe hat nun keinen Einfluß auf die Spannungen. Es kann daher

$$\varphi_p = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

gesetzt werden.

Berücksichtigt man, daß $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$ in den Ecken verschwindet, so ergibt sich aus der zweiten Bedingung von (20)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (22).$$

Um den entsprechenden Ausdruck in der Differenzenrechnung bilden zu können, hat man φ über die Ränder hinaus fortzusetzen. Man erhält für einen Punkt p des Randes (s. Abb. 2)

$$\Delta_u \varphi_p = \frac{1}{2}(\varphi_i - \varphi_a) = 0, \qquad \varphi_i = \varphi_a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (23).$$

Für die Spannungssumme ergibt sich dann

$$s'_p = \Delta^2_u \varphi = \varphi_i + \varphi_a - 2\,\varphi_p = 2\,\varphi_i - 2\,\varphi_p$$

und wegen (21)

$$s'_p = 2\,\varphi_i \quad \text{. . . . . (24).}$$

Damit sind am Rande alle erforderlichen Größen bekannt, und wir können nun an die Lösung des Gleichungssystems (16) herangehen.

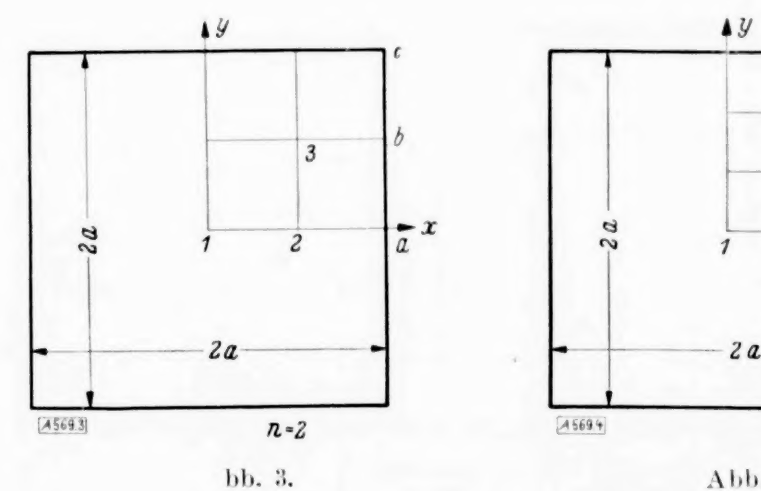
5. Lösungsgang.

Man nimmt für eine bestimmte gegebene Belastung die Durchbiegungen ω für die Knotenpunkte des gewählten Maschennetzes an. Mit Hilfe dieser Werte läßt sich das zu (16a) gehörige Gleichungssystem nach $s'_{i,k}$ auflösen. Die hierfür erhaltenen Ausdrücke setzt man in (16b) ein, berücksichtigt die Randbedingungen (21) und (24) und löst nach $\varphi_{i,k}$ auf. Mit diesen Werten läßt sich aus (16c) die Verteilung der Belastung, die die Gewölbespannungen erzeugt, berechnen. Das nächste Gleichungssystem liefert uns bei Berücksichtigung der zweiten Bedingung von (19) M'. Die Auflösung des letzten Gleichungssystems (16e) nach ω führt uns für den Fall, daß wir die Durchbiegungswerte für die Netzpunkte richtig angenommen haben, auf dieselben zurück.

Bei näherer Betrachtung von (16) erkennt man, daß die Systeme der aufzulösenden linearen Gleichungen stets die Form der für die Membran bei kleinen Durchbiegungen gültigen Differenzengleichung

$$\Delta^2_u \gamma_{i,k} + \Delta^2_v \gamma_{i,k} = -q \quad \text{. . . . . (25)}$$

haben. Die Aufgabe wird damit auf eine wiederholte Lösung des Gleichungssystems (25) zurückgeführt. Dieses läßt sich allgemein für die verschiedenen Maschenweiten auflösen. Für die Gewebe mit einer Teilung gleich einem Viertel und einem Sechstel der Seitenlänge (s. Abb. 3 und 4) sind die Lösungen in der schon erwähnten Arbeit von Hencky[4]) angegeben. Für die nächst feinere Maschenteilung $\Delta u = \Delta v = \frac{1}{4}$ sind sie in der nachstehenden Zahlentafel 1 zu finden. Statt der doppelten Zeiger sind hier die einfachen gewählt, die sich durch fortlaufende Numerierung der Punkte ergeben (Abb. 5).



bb. 3.

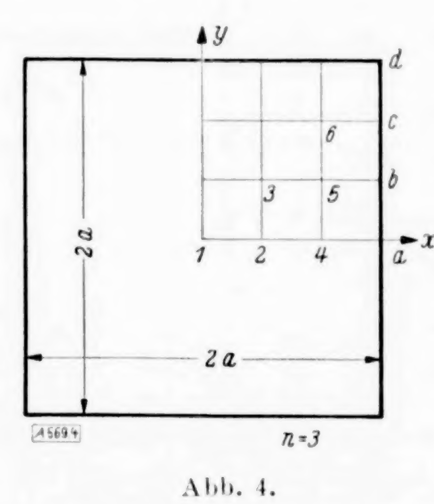


Abb. 4.

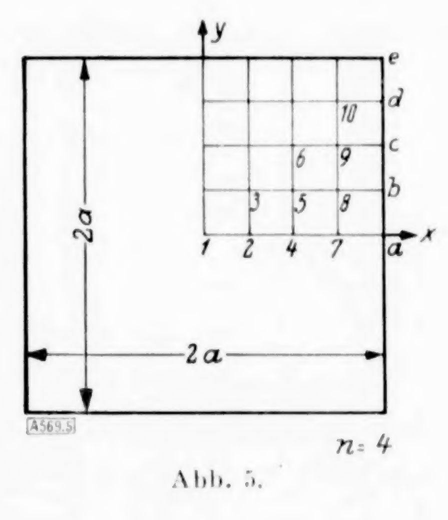


Abb. 5.

Zahlentafel 1.

Auflösung des Differenzengleichungssystems

$\Delta^2_u \gamma_{i,k} + \Delta^2_v \gamma_{i,k} = -q$ für $n = 4$.

	$q_1 \times$	$q_2 \times$	$q_3 \times$	$q_4 \times$	$q_5 \times$	$q_6 \times$	$q_7 \times$	$q_8 \times$	$q_9 \times$	$q_{10} \times$	$\gamma_a \times$	$\gamma_b \times$	$\gamma_c \times$	$\gamma_d \times$
$272\,\gamma_1 = \Sigma$	133	260	186	136	224	74	60	104	72	18	60	104	72	36
$272\,\gamma_2 = \Sigma$	65	260	186	136	224	74	60	104	72	18	60	104	72	36
$272\,\gamma_3 = \Sigma$	46,5	186	219,5	119	234	77	56	105	74	18,5	56	105	74	37
$272\,\gamma_4 = \Sigma$	34	136	119	170	204	68	68	102	68	17	68	102	68	34
$272\,\gamma_5 = \Sigma$	28	112	117	102	244	80	52	106	76	19	52	106	76	38
$272\,\gamma_6 = \Sigma$	18,5	74	77	68	160	133	38	84	100	25	38	84	100	50
$272\,\gamma_7 = \Sigma$	15	60	56	68	104	38	108	92	48	12	108	92	48	24
$272\,\gamma_8 = \Sigma$	13	52	52,5	51	106	42	46	133	62	15,5	46	133	62	31
$272\,\gamma_9 = \Sigma$	9	36	37	34	76	50	24	62	124	31	24	62	124	62
$272\,\gamma_{10} = \Sigma$	4,5	18	18,5	17	38	25	12	31	62	83,5	12	31	62	167

Die beste Näherungslösung der Differentialgleichungen (1) und (2) liefert die Rechnung mit der feinsten Mascheneinteilung. Da man aber Aufschluß über die Konvergenz des Verfahrens erhalten möchte, ist man gezwungen, mit mehreren Maschenweiten zu rechnen. Daher wurden die Lösungen für die Teilungen

$$\Delta u = \Delta v = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$$

ermittelt.

Um einen guten Vergleich zwischen Theorie und Versuch zu ermöglichen, wurden die Rechnungen mit der Poissonschen Zahl $m = 3{,}3$ für die größte Versuchsbelastung $p^* = 7{,}42$ durchgeführt, bei der die Formänderungen der untersuchten Stahlblechplatte noch sicher im elastischen Gebiet lagen.

Für $n = 1$ konnte die Durchbiegung in der Mitte aus einer Gleichung dritten Grades ermittelt werden. Für die übrigen Maschenweiten mußten die Durchbiegungen angenommen und mit Hilfe der mit diesen durch Auflösung des Gleichungssystems (16) errechneten schrittweise verbessert werden. Das Verfahren wurde besonders dadurch mühselig, daß die Rechnungen, obwohl die Versuchsergebnisse als ersten Anhalt benutzt wurden, sehr häufig wiederholt werden mußten, bis die Ausgangswerte der Durchbiegungen mit den errechneten übereinstimmten. Diese Werte waren stets schlechtere Näherungen des Differenzengleichungssystems (16) als die Ausgangswerte. An diesen wurden daher fast durchweg nur Verbesserungen angebracht, die ungefähr ein Viertel des Unterschiedes zwischen den angenommenen und den errechneten Werten betrugen. Die neuen Werte waren dann bessere Näherungen. Dies zeigte sich darin, daß die Durchrechnung zwischen den angenommenen und den errechneten Werten kleinere Unterschiede ergab als bei der vorhergehenden Rechnung. Auf diese Weise konnten schließlich nach 12 bis 14 Rechnungen die Lösungen der Differenzengleichungen auf 5 bis 6 Stellen genau erhalten werden.

Die in der Platte wirkenden Spannungen lassen sich aus den Gl. (3) und (4) errechnen, wenn man dort die Differentialquotienten durch die entsprechenden Differenzenquotienten ersetzt. Dann erhält man mit den dimensionslosen Größen (7) für die Gewölbespannungen im Knotenpunkt i, k:

$$(\sigma^*_{Gu})_{i,k} = n^2\, \Delta^2{}_v\, \varphi_{i,k}, \qquad (\sigma^*_{Gv})_{i,k} = n^2\, \Delta^2{}_u\, \varphi_{i,k}, \qquad (\tau^*_{Guv})_{i,k} = -\, n^2\, \Delta^2{}_{uv}\, \varphi_{i,k} \quad . \quad . \quad (26)$$

und ebenso für die Biegespannungen an den Begrenzungsflächen $z = \pm \frac{h}{2}$:

$$\left.\begin{aligned}
(\sigma^*_{Bu})_{i,k} &= \mp \frac{m\, n^2}{2(m^2-1)} (m\, \Delta^2{}_u\, \omega_{i,k} + \Delta^2{}_v\, \omega_{i,k}),\\
(\sigma^*_{Bv})_{i,k} &= \mp \frac{m\, n^2}{2(m^2-1)} (m\, \Delta^2{}_v\, \omega_{i,k} + \Delta^2{}_u\, \omega_{i,k}),\\
(\tau^*_{Buv})_{i,k} &= \mp \frac{m\, n^2}{2(m+1)} \Delta^2{}_{uv}\, \omega_{i,k}
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27).$$

Die Gesamtspannungen an den Oberflächen der Platte gewinnt man dann durch Summierung der aus (26) und (27) errechneten Spannungen.

Schließlich müssen wir noch die Formeln für die Ermittlung der Hauptspannungen nebst ihren Richtungen angeben:

$$\operatorname{tg} 2\,\varphi^* = \frac{2\,\tau^*_w}{\sigma^*_u - \sigma^*_v}, \qquad \sigma^*_1,\ \sigma^*_2 = \frac{\sigma^*_u + \sigma^*_v}{2} \pm \frac{\tau^*_w}{\sin 2\,\varphi^*} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

(φ^* ist der Winkel der größeren Hauptspannung gegen die u-Achse).

6. Ergebnisse der Rechnungen.

a) Konvergenz des Rechenverfahrens.

Der Vergleich der bei verschiedenen Maschenweiten durch Auflösung des Differenzengleichungssystems (16) erhaltenen Größen (s. Zahlentafel 2 und Abb. 6 bis 11) zeigt, daß diese die wahren Werte gut annähern dürften. In Abb. 6 sind die errechneten Näherungen für den Mittelpunkt der quadratischen Platte in Abhängigkeit von der Maschenteilung $\Delta u = \Delta v = \frac{1}{n}$ veranschaulicht. Dabei sind die Kurven nach links über $\Delta u = \Delta v = \frac{1}{4}$ hinaus bis zur

Grenze $\Delta u = \Delta v = 0$ extrapoliert. Sie verlaufen dort horizontal, weil mit kleiner werdender Teilung die Näherungswerte der Integration von (1) und (2) sich unbegrenzt ihren wahren Werten nähern. Um diese möglichst richtig zu erhalten, wurde zunächst bei den kleinen Durchbiegungen der freigelagerten und der eingespannten, gleichmäßig belasteten Platte, für die neben den durch Differenzenrechnung erhaltenen Näherungen auch die genauen Werte bekannt sind, festgestellt, wie stark sich jene diesen annähern. Es zeigte sich, daß bei freier Auflagerung die mit $n = 4$ ermittelten Näherungswerte des Mittelpunktes von den exakten Werten um das 1,3 fache und bei eingespanntem Rand um das 1,4 fache des Unterschiedes der mit $n = 3$ und $n = 4$ errechneten Werten abwichen. Da die ermittelten Vielfachen nur

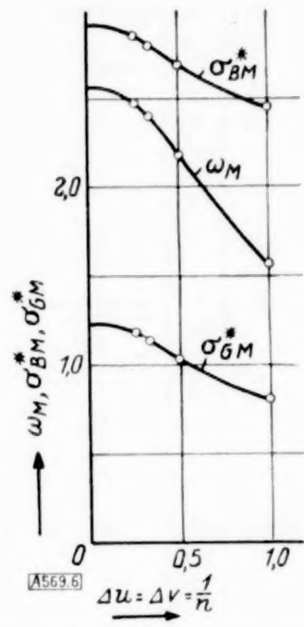


Abb. 6. Näherungswerte für die Durchbiegungen und Spannungen im Plattenmittelpunkt ($p^* = 7{,}42$).

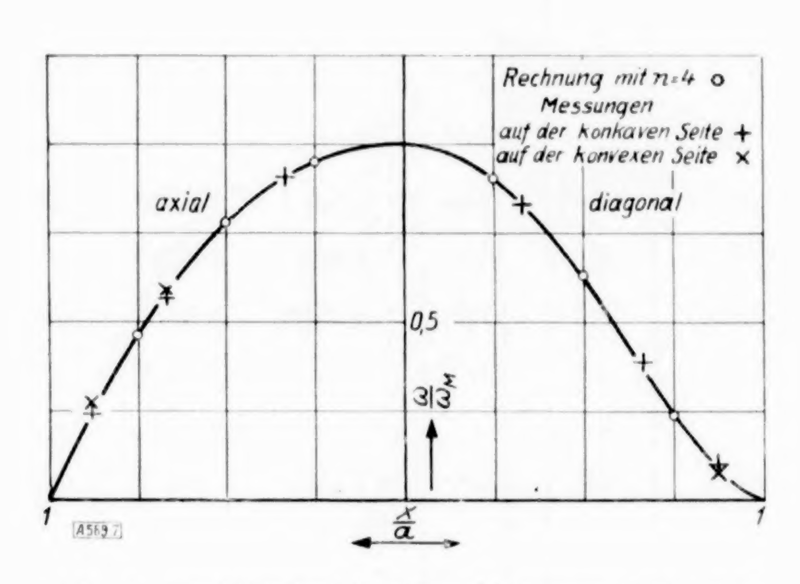


Abb. 7. Verhältnismäßige Durchbiegungen ($p^* = 7{,}42$).

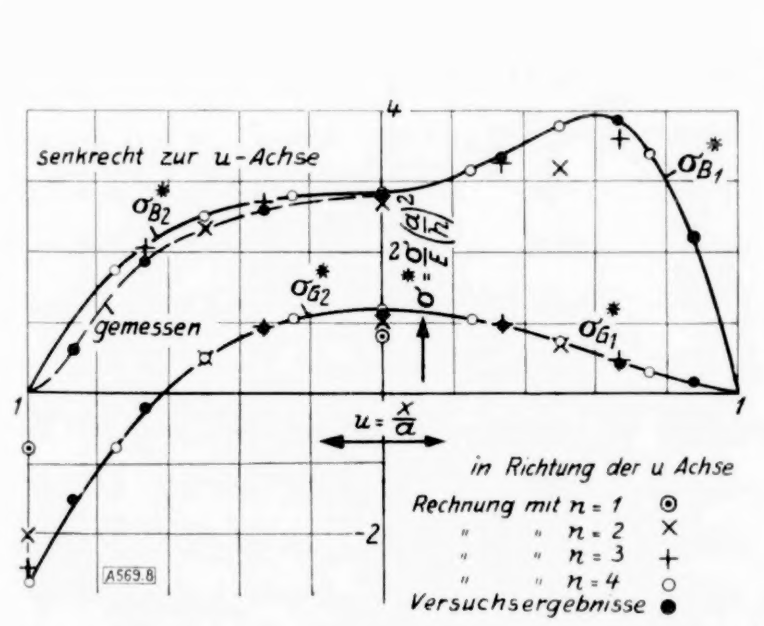


Abb. 8. Hauptspannungen längs der u-Achse ($p^* = 7{,}42$).

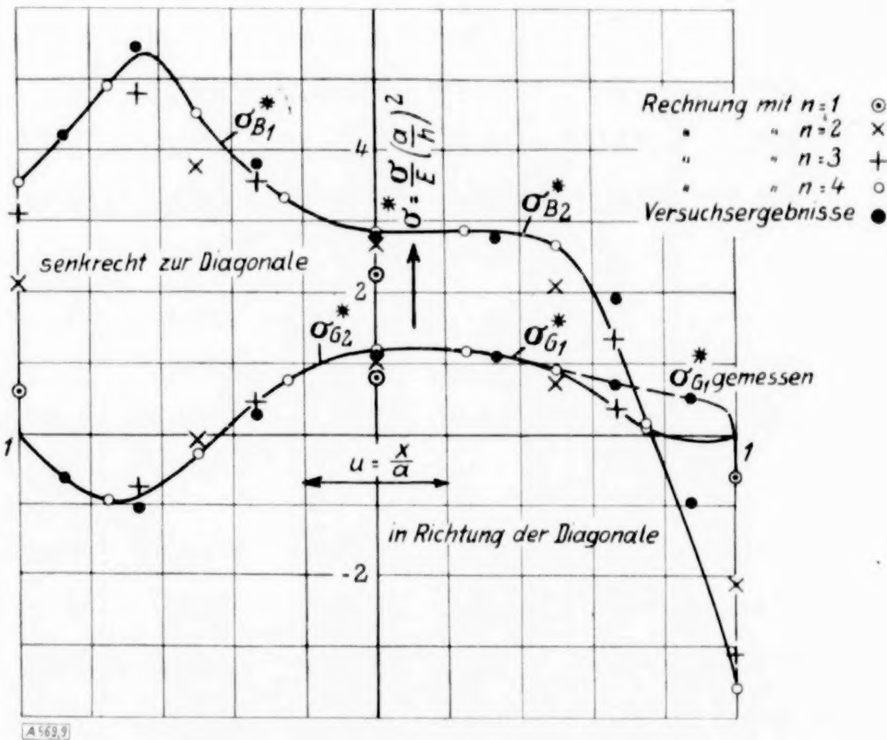


Abb. 9. Hauptspannungen längs der Diagonalen ($p^* = 7{,}42$).

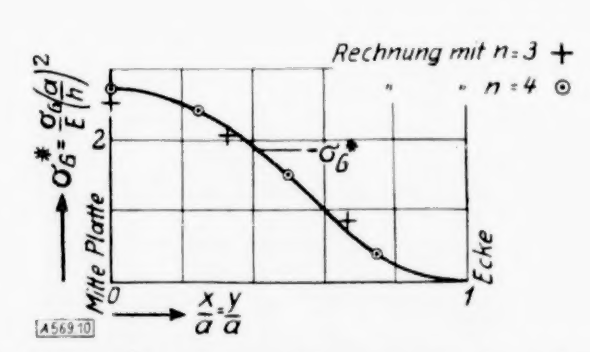


Abb. 10. Druckspannungen längs des Randes ($p^* = 7{,}42$).

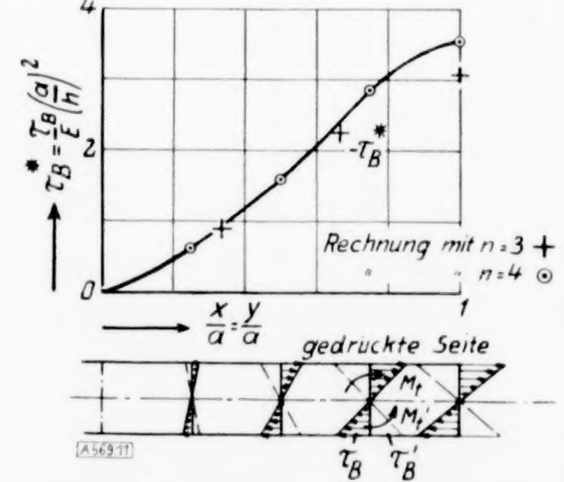


Abb. 11. Randschubkräfte ($p^* = 7{,}42$).

Zahlen-

Rechnerische Ergebnisse für die sehr dünne freiaufliegende quadratische Platte

Teilung $\Delta u = \Delta v = \frac{1}{n}$	Punkt Nr.	Durchbiegung ω	Gewölbespannungen $\sigma_G^* = \frac{\sigma_G}{E}\left(\frac{a}{h}\right)^2$						Biegespannungen		
			σ_{Gu}^*	σ_{Gv}^*	τ_{Gw}^*	σ_{G1}^*	σ_{G2}^*	ψ_G^*	σ_{Bu}^*	σ_{Bv}^*	τ_{Bw}^*
1/1	1	1,5661	0,8175	0,8175	0	0,8175	0,8175	unbest.	2,2470	2,2470	0
	a	0	0	— 0,8175	0	0	— 0,8175	0°	0	0	0
	b	0	0	0	0	0	0	unbest.	0	0	— 0,6009
1/2	1	2,1812	1,0374	1,0374	0	1,0374	1,0374	unbest.	2,6875	2,6875	0
	2	1,7129	0,6906	0,5071	0	0,6906	0,5071	0°	3,2002	2,3465	0
	3	1,3687	0,3353	0,3353	0,3861	0,7214	— 0,0509	45°	2,9398	2,9398	— 0,8369
	a	0	0	2,0517	0	0	— 2,0517	0°	0	0	0
	b	0	0	— 1,3611	0	0	— 1,3611	0°	0	0	— 1,3145
	c	0	0	0	0	0	0	unbest.	0	0	— 2,1007
1/3	1	2,4002	1,1372	1,1372	0	1,1372	1,1372	unbest.	2,8039	2,8039	0
	2	2,1830	0,9424	0,9075	0	0,9424	0,9075	0°	3,2509	2,6775	0
	3	1,9950	0,7625	0,7625	0,3014	1,0639	0,4611	45°	3,1623	3,1623	— 0,3879
	4	2,4238	0,4578	— 0,2173	0	0,4578	— 0,2173	0°	3,6127	2,0541	0
	5	1,3172	0,3812	— 0,2039	0,4262	0,6057	— 0,4283	27,8°	3,6394	2,5157	— 0,7475
	6	0,8966	— 0,1904	— 0,1904	0,5659	0,3755	— 0,7563	45°	3,0735	3,0735	— 1,7224
	a	0	0	— 2,5176	0	0	— 2,5176	0°	0	0	0
	b	0	0	— 2,0598	0	0	— 2,0598	0°	0	0	— 0,9103
	c	0	0	— 0,8395	0	0	— 0,8395	0°	0	0	— 2,2744
	d	0	0	0	0	0	0	unbest.	0	0	— 3,0964
1/4	1	2,4726	1,1793	1,1793	0	1,1793	1,1793	unbest.	2,8491	2,8491	0
	2	2,3485	1,0585	1,0537	0	1,0585	1,0537	0°	3,1550	2,7797	0
	3	2,2345	0,9516	0,9516	0,2070	1,1586	0,7447	45°	3,1046	3,1046	— 0,2355
	4	1,9353	0,7336	0,4960	0	0,7336	0,4960	0°	3,7674	2,5054	0
	5	1,8501	0,6716	0,4493	0,3489	0,9266	0,1943	36,2°	3,7707	2,8495	— 0,4477
	6	1,5515	0,3104	0,3104	0,5940	0,9044	— 0,2836	45°	3,5984	3,5984	— 0,9363
	7	1,1461	0,3152	— 0,7767	0	0,3152	— 0,7767	0°	3,3779	1,7257	0
	8	1,1022	0,2994	— 0,7252	0,3513	0,4083	— 0,8340	17,2°	3,4389	1,9939	— 0,5891
	9	0,9394	0,1213	— 0,6007	0,5968	0,4577	— 0,9372	29,4°	3,4075	2,6054	— 1,3978
	10	0,5799	— 0,4085	— 0,4085	0,5242	0,1157	— 0,9327	45°	2,5301	2,5301	— 2,3813
	a	0	0	— 2,7252	0	0	— 2,7252	0°	0	0	0
	b	0	0	— 2,4100	0	0	— 2,4100	0°	0	0	— 0,6346
	c	0	0	— 1,4960	0	0	— 1,4960	0°	0	0	— 1,6034
	d	0	0	— 0,3396	0	0	— 0,3396	0°	0	0	— 2,8834
	e	0	0	0	0	0	0	unbest.	0	0	— 3,5602

tafel 2.

bei der Belastungszahl $p^* = 7{,}4202$ und der Poissonschen Zahl $m = 3{,}3$.

$\sigma_B^* = \frac{\sigma_B}{E}\left(\frac{a}{h}\right)^2$			Hauptspannungen auf der konvexen Seite			Hauptspannungen auf der konkaven Seite			Druckanteil	
σ_{B1}^*	σ_{B2}^*	ψ_B^*	σ_{Z1}^*	σ_{Z2}^*	ψ_Z^*	σ_{D1}^*	σ_{D2}^*	ψ_D^*	p_G^*	p_B^*
2,2470	2,2470	unbest.	3,0645	3,0645	unbest.	— 1,4295	— 1,4295	unbest.	5,1212	2,2990
0	0	unbest.	0	— 0,8175	0°	— 0,8175	0	90°	0	7,4202
0,6009	— 0,6009	— 45°	0,6009	— 0,6009	— 45°	— 0,6009	0,6009	— 45°	0	7,4202
2,6875	2,6875	unbest.	3,7249	3,7249	unbest.	— 1,6501	— 1,6501	unbest.	7,7730	— 0,3528
3,2002	2,3465	0°	3,8908	2,8536	0°	— 2,5096	— 1,8394	0°	4,8344	2,5857
3,7768	2,1029	— 45°	3,7259	2,8243	— 45°	— 3,8277	— 1,3815	— 45°	1,0634	6,3568
0	0	unbest.	0	— 2,0517	0°	— 2,0517	0	90°	0	7,4202
1,3145	— 1,3145	— 45°							0	7,4202
2,1007	— 2,1007	— 45°	2,1007	— 2,1007	— 45°	— 2,1007	2,1007	— 45°	0	7,4202
2,8039	2,8039	unbest.	3,9411	3,9411	unbest.	— 1,6667	— 1,6667	unbest.	8,8892	— 1,4690
3,2509	2,6775	0°	4,1933	3,5850	0°	— 2,3085	— 1,7700	0°	7,6699	— 0,2497
3,5502	2,7744	— 45°	4,0113	3,8383	— 45°	— 3,0891	— 1,7105	— 45°	6,1132	1,3070
3,6127	2,0541	0°	4,0705	1,8368	0°	— 3,1549	— 2,2714	0°	2,3210	5,0992
4,0127	2,1424	— 26,5°	4,0752	2,2496	— 10,3°	— 4,1932	— 1,7846	— 38,5°	— 0,0431	7,4635
4,7959	1,3511	— 45°	4,0396	1,7266	— 45°	— 5,5522	— 0,9756	— 45°	— 6,7120	14,1322
0	0	unbest.	0	— 2,5176	0°	— 2,5176	0	90°	0	7,4202
0,9103	— 0,9103	— 45°							0	7,4202
2,2744	— 2,2744	— 45°							0	7,4202
3,0964	— 3,0964	— 45°	3,0964	— 3,0964	— 45°	— 3,0964	3,0964	— 45°	0	7,4202
2,8491	2,8491	unbest.	4,0284	4,0284	unbest.	— 1,6698	— 1,6698	unbest.	9,3674	— 1,9472
3,1550	2,7797	0°	4,2135	4,8334	0°	— 2,0965	— 1,7260	0°	8,7390	— 1,3188
3,3401	2,8691	— 45°	4,0848	4,0277	— 45°	— 2,5954	— 1,7105	— 45°	7,9825	— 0,5623
3,7674	2,5054	0°	4,5010	3,0014	0°	— 3,0338	— 2,0094	0°	5,7662	1,6540
3,7800	2,8402	— 22,1°	4,4507	3,2902	— 4,9°	— 3,6196	— 1,8798	— 33,2°	4,6244	2,7958
4,5347	2,6621	— 45°	4,2511	3,5665	— 45°	— 4,8183	— 1,7577	— 45°	0,2155	7,2047
3,3779	1,7252	0°	3,6931	0,9490	0°	— 3,0627	— 2,5024	0°	0,7091	6,7111
3,7581	1,6747	— 19,6°	3,7608	1,2462	— 5,5°	— 3,8929	— 1,9657	— 38,7°	— 0,7617	8,1819
4,6401	1,3728	— 37,0°	3,8728	1,6606	— 23,2°	— 5,2412	— 1,2512	— 44,4°	— 5,6029	13,0231
4,9114	0,1488	— 45°	3,9787	0,2645	— 45°	— 5,8441	— 0,0331	— 45°	— 9,3872	16,0874
0	0	unbest.	0	— 2,7252	0°	— 2,7252	0	90°	0	7,4202
0,6346	— 0,6346	— 45°	0,16	— 2,56	— 14,4°	— 2,56	0,16	— 75,6°	0	7,4202
1,6034	1,6034	— 45°	1,02	— 2,52	— 32,5°	— 2,52	1,02	— 57,5°	0	7,4202
2,8834	— 2,8834	— 45°	2,72	— 3,06	— 43,3°	— 3,06	2,72	— 46,7°	0	7,4202
3,5602	— 3,5602	— 45°	3,5602	— 3,5602	— 45°	— 3,5602	3,5602	— 45°	0	7,4202

sehr wenig voneinander verschieden sind, obwohl die Differenzenrechnung im ersten Fall gute und im zweiten nur schlechte Näherungen liefert, scheint der Schluß berechtigt zu sein, daß dieselben für die Platte mit großen Ausbiegungen bei den gleichen Zahlen liegen. Wenn man mit diesen rechnet, erhält man für die genauen Werte in der Mitte:

$$\omega_M = 2{,}56\,(2{,}47), \quad \sigma^*_{B\,M} = 2{,}91\,(2{,}85), \quad \sigma^*_{G\,M} = 1{,}23\,(1{,}18).$$

Zum Vergleich sind die Ergebnisse mit $n = 4$ in Klammern beigefügt. Man ersieht daraus, daß sie den mutmaßlichen genauen Werten schon sehr nahe kommen.

b) Randschubkräfte und Auflagerkräfte.

Die Rechnungen ergeben am Plattenumfang zur Mittelfläche parallel gerichtete Schubspannungen τ_B, die verhältnisgleich ihrem Abstand von der elastischen Fläche sind und durch Drillmomente M_t erzeugt werden müssen. In Abb. 11 ist die Verteilung von τ_B längs des Randes dargestellt. Die Schubspannungen sind also in der Mitte Null und nehmen nach den Ecken hin zu. Bei einer freigelagerten Platte mit freien Rändern können nun am Umfang keine Schubspannungen übertragen werden. Man muß nun die errechneten Schubspannungen τ_B durch Schermomente M_t' von gleicher Größe, aber entgegengesetzter Richtung wie M_t, zum Verschwinden bringen und deren Einfluß auf die Spannungen, Durchbiegungen und Auflagerkräfte der Platte betrachten. Wie Kelvin und Tait gezeigt haben, können solche Randschermomente nur den Formänderungszustand in einem schmalen Randstreifen stören. Sie bewirken aber längs des Randes eine Erhöhung des Auflagerdruckes und in den Ecken eine Erniedrigung durch eine Einzelkraft, die genau so groß ist wie die Summe der längs des Randes eingetretenen Auflagerdruckerhöhungen. Die Auflagerdrücke sind also nicht mehr mit den Scherkräften identisch. Sie sind um die durch den Ersatz der Schubspannungen entstandenen zusätzlichen Stützkräfte verschieden.

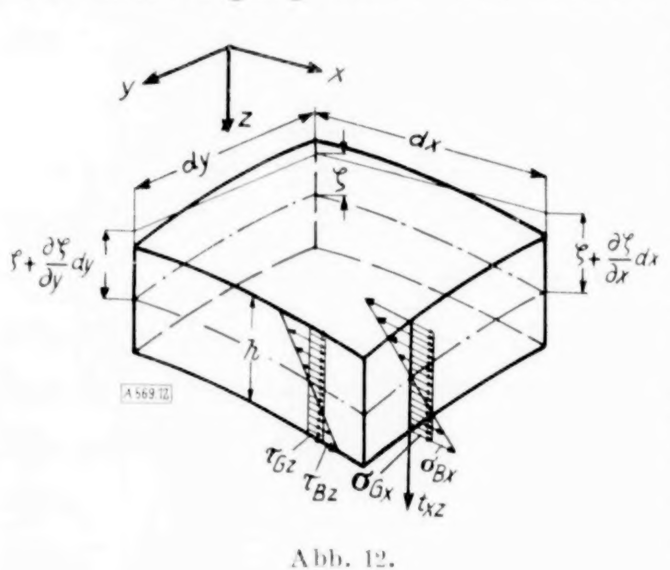


Abb. 12.

Wir wollen nun den größten Auflagerdruck berechnen. Zu diesem Zwecke betrachten wir in Abb. 12 ein Plattenelement von den Seitenlängen dx und dy und der Höhe h und stellen das Gleichgewicht gegen Drehen um die y-Achse auf. In die Abbildung sind auf den sichtbaren Seiten die spezifischen Kräfte eingezeichnet, die Momente für diese Achse liefern: die von der Biegesteifigkeit herrührenden Spannungen σ_{Bx} und τ_{Bz}, die von der Wölbung der Platte herrührenden über die ganze Dicke gleichmäßig verteilten Spannungen σ_{Gx} und τ_{Gz} und schließlich die vertikal gerichteten auf die Längeneinheit der Schnittkante bezogenen Schubkräfte t_{xz}, die sich zu einer durch den Mittelpunkt der Seitenfläche gehenden Resultierenden $t_{xz}\,dy$ zusammenfassen lassen. Man erhält als Gleichgewichtsbedingung für die Momente um die y-Achse:

$$\left.\begin{aligned} &dx\,dy\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\partial \sigma_{Bx}}{\partial x}\,z\,dz + dx\,dy\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \frac{\partial \tau_{Bz}}{\partial y}\,z\,dz + \sigma_{Gx}\,h\,dy\,\frac{\partial \zeta}{\partial x}\,dx \\ &\qquad + \tau_{Gz}\,h\,dx\,\frac{\partial \zeta}{\partial y}\,dy - t_{xz}\,dx\,dy = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (29).$$

Die Scherkräfte t_{xz} für die Einheit der Schnittbreite ergeben sich hieraus nach Einführung der Gl. (4) und Integration nach z wie folgt:

$$t_{xz} = -\frac{m^2 E}{m^2-1}\,\frac{h^3}{12}\,\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right\} + h\left(\sigma_{Gx}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \tau_{Gz}\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right) \quad \ldots\ldots \quad (30).$$

Am Rande verschwindet der zweite Ausdruck, der die Vertikalkomponenten der Gewölbespannungen darstellt. Denn für $x = \pm a$ ist $\sigma_{Gx} = 0$ und $\tau_{Gz} = 0$ und für $y = \pm a$: $\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0$ und $\tau_{Gz} = 0$. Da nun an den Randlinien die Scherkräfte mit den Auflagerdrücken übereinstimmen, wenn wir von dem Ersatz der Randdrillmomente durch die zusätzlichen Stützkräfte absehen, ergibt sich, daß die Auflagerkräfte nur von den Biegemomenten abhängen. Man erhält dann für sie in der dimensionslosen Schreibweise:

am Rande $u=1$

$$t^*_{uw}=\frac{t_{xz}}{p\,a}=-\frac{m^2}{12\,(m^2-1)}\,\frac{\partial}{\partial\,u}\left\{\frac{\partial^2\,\omega}{\partial\,u^2}+\frac{\partial^2\,\omega}{\partial\,v^2}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

und dementsprechend am Rande $v=1$

$$t^*_{vw}=\frac{t_{yz}}{p\,a}=-\frac{m^2}{12\,(m^2-1)}\,\frac{\partial}{\partial\,v}\left\{\frac{\partial^2\,\omega}{\partial\,u^2}+\frac{\partial^2\,\omega}{\partial\,v^2}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32).$$

Mit Berücksichtigung der an Stelle der Randschermomente tretenden Auflagerkräfte ergeben sich die Gesamtauflagerkräfte wie folgt:

für $u=1$

$$T^*_{uw}=t^*_{uw}+\frac{1}{6}\,\frac{\partial\,\tau^*_{Bz}}{\partial\,u}=-\frac{m^2}{12\,(m^2-1)}\left\{\frac{\partial^3\,\omega}{\partial\,u^3}+\frac{2\,m-1}{m}\,\frac{\partial^3\,\omega}{\partial\,u\,\partial\,v^2}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (33);$$

für $v=1$

$$T^*_{vw}=t^*_{vw}+\frac{1}{6}\,\frac{\partial\,\tau^*_{Bz}}{\partial\,v}=-\frac{m^2}{12\,(m^2-1)}\left\{\frac{\partial^3\,\omega}{\partial\,v^3}+\frac{2\,m-1}{m}\,\frac{\partial^3\,\omega}{\partial\,u^2\,\partial\,v}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (34).$$

Die Gl. (31) bis (34) lauten in der Differenzenrechnung für die gleichen Ränder:

$$t^*_{uw}=-\frac{m^2\,n^3}{12\,(m^2-1)}\,\Delta_u\,(\Delta^2{}_u\,\omega+\Delta^2{}_v\,\omega)-\frac{1}{2\,n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (31\,\text{a}),$$

$$t^*_{vw}=-\frac{m^2\,n^3}{12\,(m^2-1)}\,\Delta_v\,(\Delta^2{}_u\,\omega+\Delta^2{}_v\,\omega)-\frac{1}{2\,n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32\,\text{a}),$$

$$T^*_{uw}=-\frac{m^2\,n^3}{12\,(m^2-1)}\left(\Delta^3{}_u\,\omega+\frac{2\,m-1}{m}\,\Delta_u\,\Delta^2{}_v\,\omega\right)\frac{1}{2\,n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33\,\text{a}),$$

$$T^*_{vw}=-\frac{m^2\,n^3}{12\,(m^2-1)}\left(\Delta^3{}_v\,\omega+\frac{2\,m-1}{m}\,\Delta^2{}_u\,\Delta_v\,\omega\right)-\frac{1}{2\,n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34\,\text{a}).$$

Dazu kommen noch in den Ecken Einzelkräfte, die entgegengesetzt zu den übrigen Auflagerkräften gerichtet sind und ein Abheben der Ecken von ihrer Randunterlage verhindern. Sie haben die Größe:

$$D^*=\frac{D}{p\,a^2}=-\frac{\tau^*_{Bz}}{3\,p^*}=\frac{m}{6\,(m+1)}\,\frac{1}{p^*}\,\frac{\partial^2\,\omega}{\partial\,u\,\partial\,v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35).$$

c) Durchbiegungen und Spannungen der Platte bei kleinen Durchbiegungen.

Bevor wir mit der Besprechung der Rechenergebnisse für die Platte bei großen Ausbiegungen beginnen, müssen wir uns zunächst mit der dünnen Platte beschäftigen, da wir diese häufig zum Vergleich heranziehen wollen.

Bei der dünnen Platte ist die Durchbiegung klein im Verhältnis zur Plattendicke und können die über die ganze Plattendicke gleichmäßig verteilten Gewölbespannungen gegenüber den Biegespannungen vernachlässigt werden. In den Differentialgleichungen (1) und (2) fallen dann die nichtlinearen Glieder weg. Die Gleichungen vereinfachen sich zu:

$$\frac{\partial^4\,z}{\partial\,x^4}+2\,\frac{\partial^2\,z\,\partial^2\,z}{\partial\,x^2\,\partial\,y^2}+\frac{\partial^4\,z}{\partial\,y^4}=\frac{p}{N} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36),$$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial\,x^4}+2\,\frac{\partial^2 F\,\partial^2 F}{\partial\,x^2\,\partial\,y^2}+\frac{\partial^4 F}{\partial\,y^4}=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37).$$

Hierfür sind strenge Lösungen bekannt. Nadai[5]) hat u. a. eine solche für die freiaufliegende gleichmäßig belastete Platte aufgestellt, deren Ergebnisse zur Darstellung des Spannungs- und Trajektorienverlaufs (Abb. 13, 14a und b) benutzt sind. Die Spannungen und Durch-

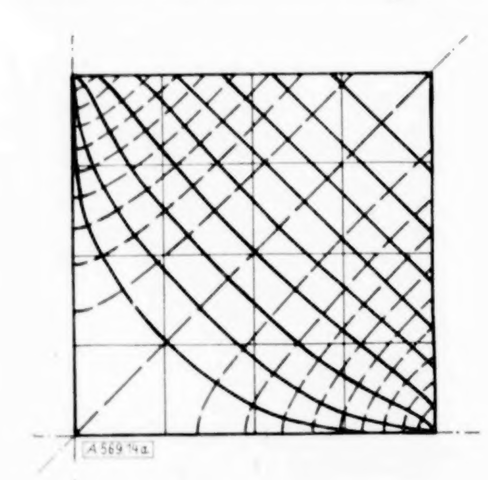
[5]) Nadai: Die Formänderungen und Spannungen von rechteckigen elastischen Platten, Forsch.-Arb. 170/171, S. 30 bis 42.

biegungen wachsen an allen Stellen der Platte verhältnisgleich mit der Belastung. Abb. 13 zeigt den Verlauf der Hauptspannungen längs der Symmetrielinien. Die Spannung ist am höchsten in der Mitte der Platte. Von dort nimmt sie am langsamsten längs der Diagonalen in den hierzu senkrechten Richtungen ab und besonders stark in Richtung der Diagonalen, wobei sie negative Werte im Eckgebiet erreicht. Diese sind darauf zurückzuführen, daß die Ecken sich so verhalten, als ob sie fest eingespannt wären.

Abb. 13. Spannungen der quadratischen Platte bei kleinen Durchbiegungen.

Einen Überblick über die gesamten an der Platte auftretenden Momente und Spannungen erhält man aus dem Trajektoriennetz und dem zugehörigen Schichtlinienbild der Hauptspannungsfläche (Abb. 14 a und b), welche für ein Viertel der Platte gezeichnet sind. Die Trajektorien verlaufen hyperbelartig mit den Achsen bzw. den Diagonalen als Symmetrielinien. In der Mitte ist ein singulärer Kreispunkt[6]) vorhanden, da die Biegespannung hier nach allen Richtungen gleich groß ist. Durch diesen Punkt gehen zwei Paar von Grenzlinien für die Größtbiegespannungen in axialer und für die Kleinstbiegespannungen in diagonaler Richtung. Die Scheitel der Größtspannungstrajektorien befinden sich auf den Diagonalen und die der Kleinstspannungstrajektorien auf den Koordinatenachsen. Die Spannungen nehmen längs einer Trajektorie von den Scheiteln nach beiden Seiten ab. Im Randgebiet fallen sie, besonders in der Nähe der Ecken, sehr stark auf Null ab.

Die Trajektorien bilden nahe dem Rande mit der u-Achse einen Winkel von fast 45° bzw. 135°. Unter welchen Winkeln sie den Rand treffen, darüber geben die Rechnungen keinen Aufschluß, da die infolge des Ersatzes der Randdrillmomente durch Auflagerkräfte (vgl. S. 82) in unmittelbarer Nähe des Randes auftretenden Spannungen nicht bekannt sind. Der Rand ist als singuläre Linie anzusehen.



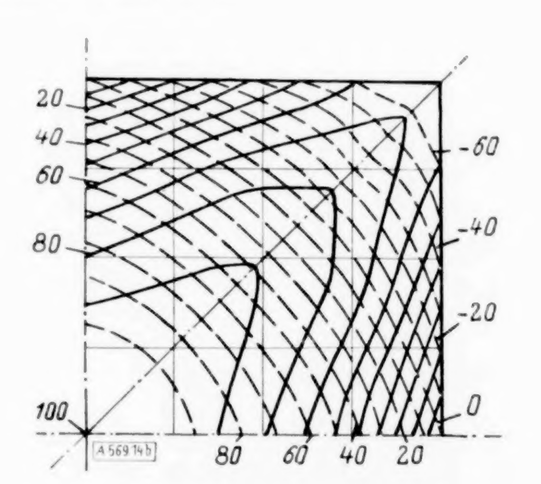


Abb. 14 a und b. Trajektorien und Schichtlinien der Spannungsflächen σ_1, σ_2 für die Biegespannungen bei kleinen Durchbiegungen. (Spannung in Plattenmitte gleich 100 gesetzt.)

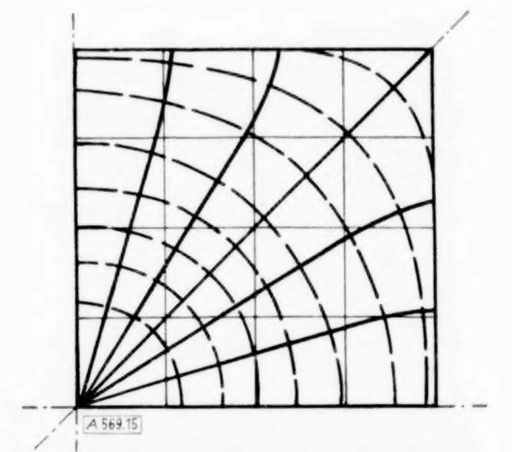


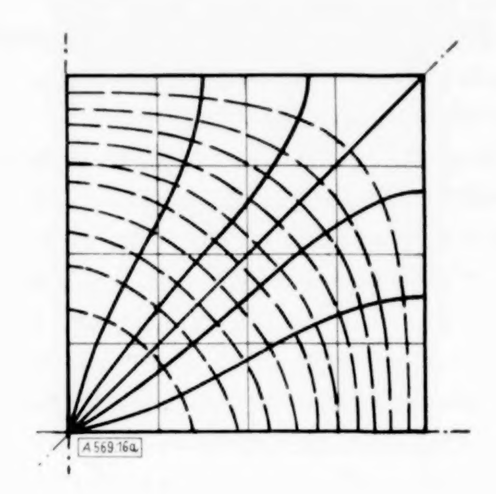
Abb. 15. Trajektorien für die Gewölbespannungen bei kleinen Durchbiegungen.

In Abb. 15 ist auch das Trajektoriennetz der Gewölbespannungen bei kleinen Durchbiegungen gezeichnet. Es wurde dadurch erhalten, daß das System der Gl. (16) mit den Durchbiegungen der dünnen Platte durchgerechnet wurde. Da bei diesen die Gewölbespannungen gegenüber den Biegespannungen sehr klein sind, können sie deren Verlauf kaum beeinflussen.

d) Besprechung der Ergebnisse für die sehr dünne Platte.

Wir wollen nun an Hand unserer Rechenergebnisse das Spannungsbild für den Fall beschreiben, daß der Wölbepfeil ein Vielfaches der Dicke beträgt. Für die Abb. 16 bis 19 sind die Ergebnisse der Differenzenrechnung mit einer Maschenteilung gleich einem Achtel der Seitenlänge benutzt. Sie geben, wie schon früher gezeigt wurde, ein nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ fast richtiges Bild der Spannungsverhältnisse.

[6]) Eine ausführliche Darstellung der bei Feldern vorkommenden singulären Punkte findet man bei Th. Wyß: Die Kraftfelder in festen elastischen Körpern, J. Springer, 1926.



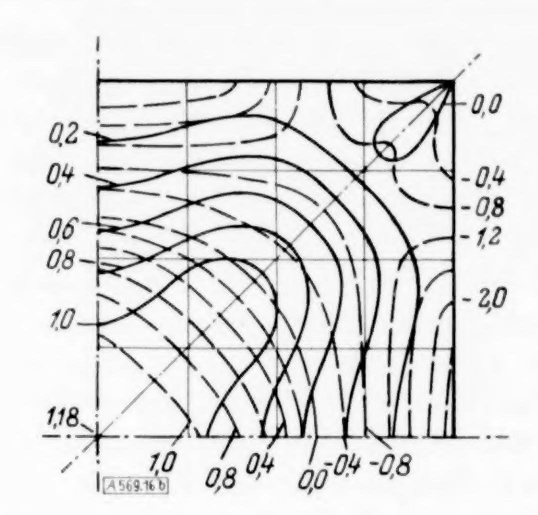
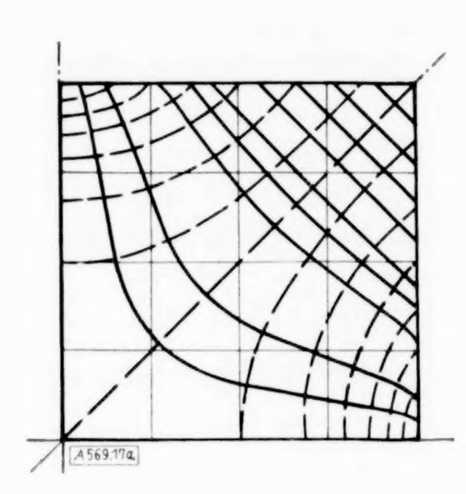


Abb. 16a und b.



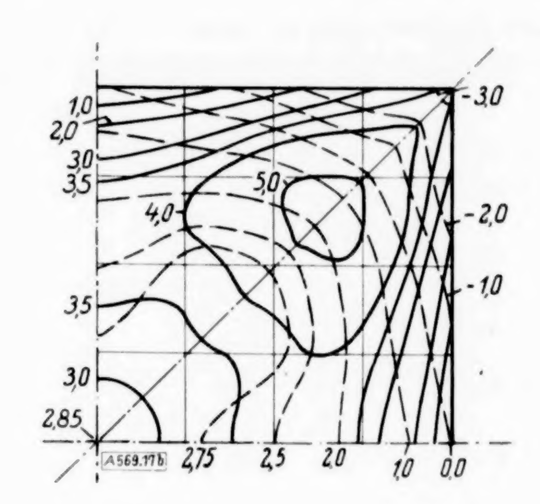
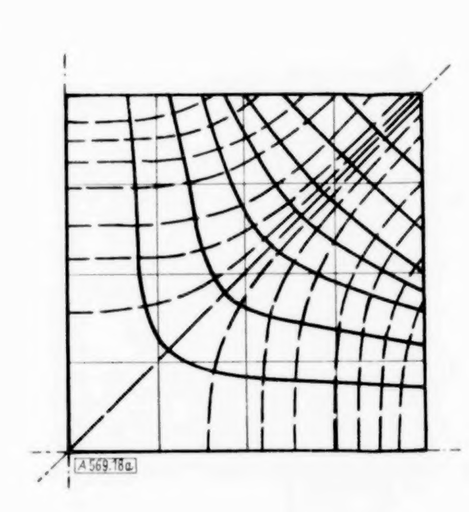


Abb. 17a und b.



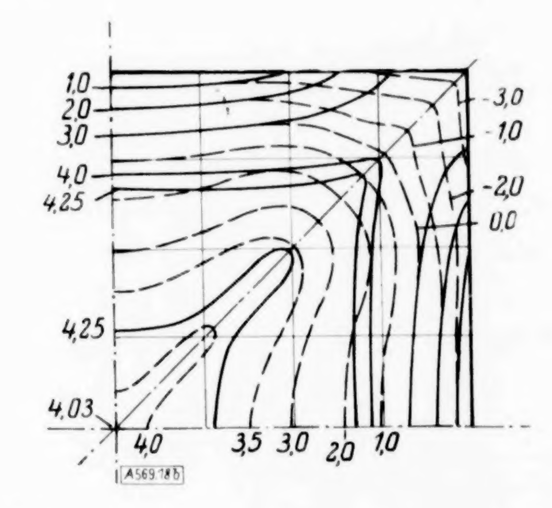
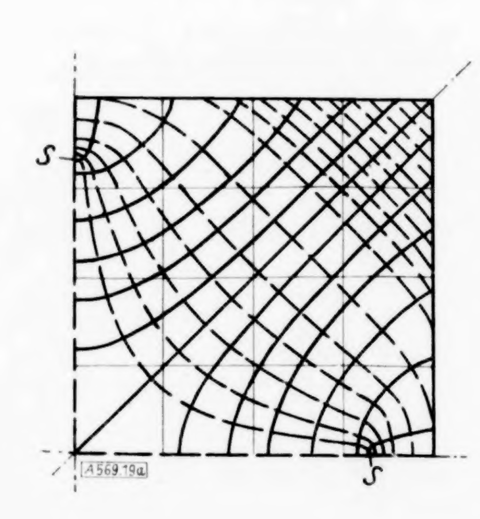


Abb. 18a und b.



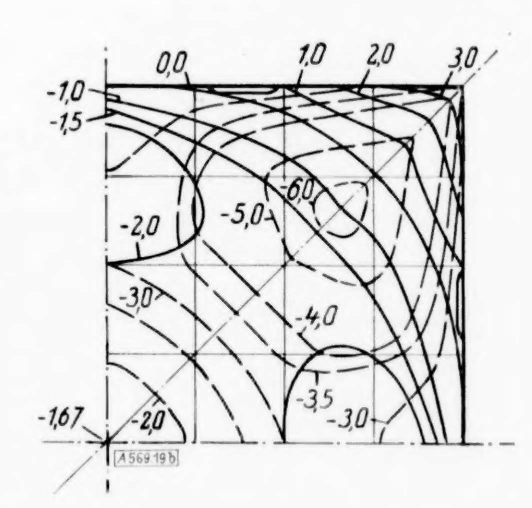


Abb. 19a und b.

Trajektorien und Schichtlinien der Spannungsflächen σ_1^* und σ_2^* bei großen Ausbiegungen der Platte ($p^* = 7{,}42$).

Abb. 16a und b für die Gewölbespannung. Abb. 17a und b für die Biegespannung.

Abb. 18a und b für die konvexe Seite. Abb. 19a und b für die konkave Seite.

Trajektorien der Größtspannungen und Schichtlinien der Größtspannungsfläche ———————.

Trajektorien der Kleinstspanungen und Schichtlinien der Kleinstspannungsfläche – – – – – – .

Wir betrachten zunächst die Anteile der über die ganze Dicke der Platte gleichmäßig verteilten Gewölbespannungen und der mit dem Abstand von der Mittelfläche linear zunehmenden Biegespannungen, in die wir die Spannungen der Platte zerlegt haben.

Da die Biegespannungen in der Mittelfläche Null sind, sind die Gewölbespannungen zugleich auch die Spannungen der Mittelfläche. Sie sind in der Plattenmitte nach allen Richtungen gleich groß (s. Abb. 8, 9 und 16a und b). Die Trajektorien für die größeren Hauptspannungen gehen von hier strahlenförmig aus und münden senkrecht in den Rand ein. Die Spannungen nehmen längs dieser Linien von der Mitte nach dem Rand zu auf Null ab. Die Trajektorien für die kleineren Hauptspannungen sind im Gegensatz zu den ersteren geschlossen und verlaufen nahe der Plattenmitte annähernd kreisförmig. In den zum Umfange parallelen Richtungen des Randgebietes kommen nur Druckspannungen vor. Diese sind am größten in der Mitte des Randes, wo sie für die gerechnete Belastung das 2,4 fache der in der Mitte vorhandenen Zugspannung betragen. Sie nehmen längs des Randes von der Mitte nach den Ecken zu auf Null ab.

Die Druckspannungen kann man sich sehr gut erklären, wenn man die Verschiebungen ξ, η in der Plattenebene betrachtet. Man erhält sie durch Integration aus folgenden Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \varepsilon_{G\,x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 \\ \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \varepsilon_{G\,y} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (38),$$

wo $\varepsilon_{G\,x}$ und $\varepsilon_{G\,y}$ die Dehnungen in der Mittelfläche bedeuten. Benutzt man für sie die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{G\,x} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_{G\,x} - \frac{1}{m}\,\sigma_{G\,y}\right) \\ \varepsilon_{G\,y} &= \frac{1}{E}\left(\sigma_{G\,y} - \frac{1}{m}\,\sigma_{G\,x}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (39)$$

und führt außer den Ausdrücken (7)

$$\xi = \xi^* \frac{h^2}{a}, \qquad \eta = \eta^* \frac{h^2}{a} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (40)$$

in die Gl. (38) ein, so erhält man die dimensionslosen Differenzengleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \xi^* &= \frac{1}{n}\left(\sigma^*_{G\,x} - \frac{1}{m}\,\sigma^*_{G\,y} - \frac{1}{2}\,n^2\,\Delta^2{}_u\,\omega\right) \\ \eta^* &= \frac{1}{n}\left(\sigma^*_{G\,y} - \frac{1}{m}\,\sigma^*_{G\,x} - \frac{1}{2}\,n^2\,\Delta^2{}_v\,\omega\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (41).$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich, daß der Rand nach innen verschoben wird, und zwar die rechte Randmitte um $\xi^* = -3{,}38$ und die Ecke um $\xi^* = \eta^* = -1{,}40$. Die Randfasern werden dadurch verkürzt. Sie kommen unter Druckspannungen. Die Druckkräfte im Randgebiet müssen den Zugkräften im mittleren Teil der Platte das Gleichgewicht halten, da Auflagerkräfte in der Plattenebene wegen der freien Auflagerung nicht vorhanden sind.

Unter dem Einfluß der Längsdehnungen der sehr dünnen Platte ändert sich das Spannungsbild der Biegespannungen wesentlich gegenüber dem der dünnen Platte. Die größte Spannung liegt nicht mehr in Plattenmitte, sondern weiter außerhalb (s. Abb. 8, 9 und 17b). Die größere Hauptspannung steigt von der Mitte nach jeder Richtung bis zu einem Größtwert an, um dann erst nach dem Rande zu auf Null abzufallen. Die Größtspannungen liegen in einem ringförmigen Gürtel, der den Mittelpunkt umschließt. Sie sind am höchsten auf den Diagonalen und am niedrigsten auf den Achsen. Die Trajektorien verlaufen, wie bei der dünnen Platte, hyperbelartig mit den Koordinatenachsen bzw. den Diagonalen als Symmetrielinien. Sie sind aber stärker gekrümmt als bei der dünnen Platte.

Wir betrachten nun die Spannungstrajektorien, Abb. 18a, 19a, die durch die Überlagerung der Biege- und der Gewölbespannungen auf den Oberflächen der Platte entstehen. Ihr Verlauf ist auf der Unter- und Oberseite verschieden. Der Grund liegt darin, daß die Biegespannungen auf beiden Seiten mit entgegengesetzten Vorzeichen, dagegen die Gewölbespannungen mit gleichen Vorzeichen auftreten. Da die Biegespannungen durchweg bedeutend größer als die Gewölbespannungen sind, ist der Trajektorienverlauf der resultierenden Spannungen im wesentlichen dem der erstgenannten Spannungen ähnlich.

Auf der konvexen Seite sind die hyperbelartig verlaufenden Trajektorien der Größtspannungen, Abb. 18a, an ihren Scheiteln stärker gekrümmt als dieselben für die Biegespannungen. Die entsprechenden Linien der Kleinstspannungen drängen sich in der Nähe der Diagonalen zusammen. Die Spannungsmaxima auf den Achsen und auf den Diagonalen sind ungefähr gleich hoch. Die Ursache hierfür liegt darin, daß an den betreffenden Stellen die größten Biegespannungen auf den Achsen durch die Zugwirkung der Gewölbespannungen vermehrt und auf den Diagonalen durch die Druckwirkung derselben vermindert werden.

Auf der konkaven Seite, Abb. 19a und b, fällt besonders auf, daß außer dem singulären Kreispunkt in der Mitte auf den Achsen vier singuläre Kreispunkte S vorhanden sind. Jeder von diesen ist Berührungspunkt für zwei Grenzlinien. Das Stück von S bis zur Mitte bildet die Grenzlinie für die Kleinstspannungslinie (algebraisch) und das von S bis zum Rande die für die Größtspannungslinie. Ein Teil der Trajektorien für die Kleinstspannungen umschließt die Punkte S hakenförmig. Dadurch bilden dieselben geschlossene Figuren, wobei sie nahe den Plattendiagonalen hyperbelartigen Verlauf zeigen. Soweit die Trajektorien nicht geschlossen sind, mündet die eine Schar genau so wie auf der konvexen Seite tangential und die andere senkrecht in den Rand ein. Die Diagonalen sind die Grenzlinien für die Größtspannungen. Die größten Druckspannungen greifen an einem Schnitt längs der Diagonalen an. Sie sind zahlenmäßig größer als die Zugspannungen auf der konvexen Seite. Das Maximum tritt besonders scharf hervor, da sich die Druckspannungen der Biegung und der Wölbung addieren. Auf den Achsen sind die Spannungsmaxima viel kleiner, da die Druckspannungen der Biegung

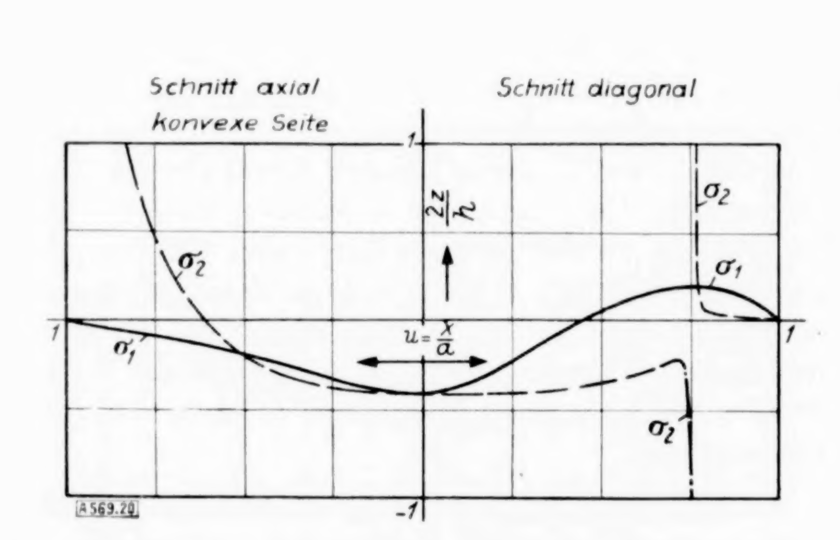


Abb. 20. Nullinien der Spannung.

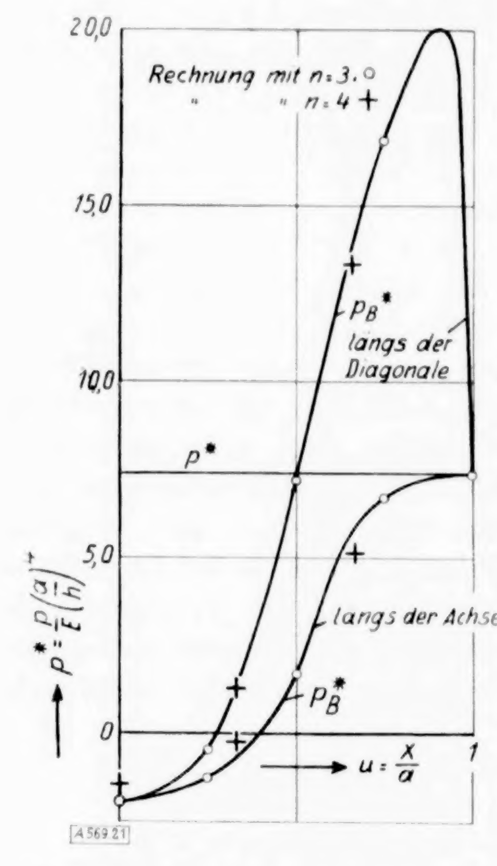


Abb. 21. Verteilung der Teildrücke, die die Biegespannungen erzeugen.

durch die von der Wölbung herrührenden Zugspannungen vermindert werden. Bemerkenswert ist die niedrige Spannung in der Plattenmitte. Die Hauptursache liegt darin, daß im mittleren Teil der Platte die von den äußeren Kräften geleistete Arbeit fast ausschließlich für die Erzeugung der Gewölbespannungen verbraucht wird.

Einen Überblick darüber, welche Spannungen der einen Außenfläche gegenüber der anderen die größeren sind, vermittelt Abb. 20, in der die Nullinien längs eines Achs- und Diagonalschnittes dargestellt sind. Diese Spannungen sind nämlich in einander gegenüberliegenden Punkten verhältnisgleich den Abständen dieser von den Nullinien.

Nach S. 74 kann man sich den Druck p, mit dem die Platte bei großen Ausbiegungen belastet wird, in zwei Teile zerlegt denken, von denen der eine die Biegespannungen und der andere die Gewölbespannungen erzeugt. Wir wollen zunächst den ersten Teildruck p_B^* bei der Belastung $p^* = 7{,}42$ etwas näher betrachten. Seine Verteilung längs der Symmetrielinien ist in Abb. 21 dargestellt. Man erkennt hieraus die starke Abhängigkeit der Kräfte von den Koordinaten u, v. In der Mitte entlasten sie die Platte, während sie diese am Rande in voller Höhe des gegebenen Druckes belasten. Auf den Diagonalen erreichen sie stellenweise das $2\frac{1}{2}$fache von $p^* = 7{,}42$.

Belastet man eine dünne quadratische Platte mit freier Auflagerung in der Art, wie sie obige Belastungsfunktion vorschreibt, so findet man bei ihr Durchbiegungen, Biegespannungen und Auflagerkräfte, die denen der behandelten sehr dünnen Platte an entsprechenden Stellen verhältnisgleich sind.

Die Gewölbespannungen werden durch Druckkräfte hervorgerufen, die gleich der Differenz aus der gegebenen und der für die Erzeugung der Biegespannungen dienenden Belastung sind. Sie fallen von einem Größtwert in der Mitte teilweise sogar auf negative Werte ab, die im Sinne der Entlastung wirken, und verschwinden am Rande.

Da nun die von den Momenten der Gewölbespannungen herrührenden Auflagerkräfte Null sind und die Summe der Belastungskräfte gleich derjenigen der Auflagerkräfte ist, ergibt sich, daß das Integral der Lastanteile, die die Gewölbespannungen erzeugen, verschwindet, und daß folglich das Integral über die Lastanteile, die die Biegespannungen erzeugen, gleich dem der gegebenen Belastung ist.

Wir kommen nun auf die Tragfähigkeit der sehr dünnen, freigelagerten Platte zu sprechen. Da nun der Mittelwert der für die Erzeugung der Gewölbespannungen dienenden Drücke Null ist, könnte man annehmen, die Widerstandsfähigkeit der sehr dünnen Platte rühre allein von der Biegesteifigkeit der Platte her und ließe sich nach der gewöhnlichen Plattentheorie berechnen. Dem ist nicht so. Die Tragfähigkeit wird indirekt durch die Gewölbespannungen sehr erheblich beeinflußt.

Wir müssen hier auf die größte Anstrengung der Platte eingehen. Nach der Mohr-Guestschen Theorie, die auch durch Versuche im großen und ganzen bestätigt werden konnte, ist die Differenz zwischen der algebraisch größten und kleinsten der drei Hauptspannungen maßgebend für die größte Inanspruchnahme. Danach ergeben sich bei Benutzung der Rechnungen mit $n = 4$ die größten Beanspruchungen auf den Diagonalen der konkaven Seite durch die Spannungen $\sigma^*_{D_1} = -6{,}3$ für den Punkt $u = v = 0{,}65$ und in den Ecken durch $\sigma^*_1 - \sigma^*_2 = \pm\, 7{,}10$. Würde aber die Platte das Verhalten einer Platte mit kleinen Durchbiegungen zeigen, so würde sie bei der nämlichen Belastung am stärksten beansprucht durch $\sigma^* = \pm\, 8{,}43$ in der Mitte und durch $\sigma^*_1 - \sigma^*_2 = \pm\, 11{,}1$ in den Ecken. Man erkennt, daß die größten Beanspruchungen der sehr dünnen freigelagerten Platte durch die Gewölbespannungen bedeutend niedriger ausfallen, als die nach der Theorie der kleinen Durchbiegungen errechneten. Demgemäß besitzt also eine sehr dünne Platte eine größere Widerstandsfähigkeit, als die Berechnung nach der gewöhnlichen Theorie ergibt. Die Ursache dieser Erscheinung liegt in dem günstigen Einfluß der Wölbung. Denn gerade die Kräfte im mittleren Teil der Platte, die bei der dünnen Platte immer den größten Beitrag zu den Biegespannungen ergeben, dienen ausschließlich für die Erzeugung der Dehnungsspannungen. Diese liefern daher einen erheblichen Beitrag zur Formänderungsarbeit. Das ist vorteilhaft, denn eine Arbeitsaufnahme durch Gewölbespannungen führt wegen der gleichmäßigen Spannungsverteilung nur auf die 0,58fache Beanspruchung gegenüber einer solchen durch Biegespannungen.

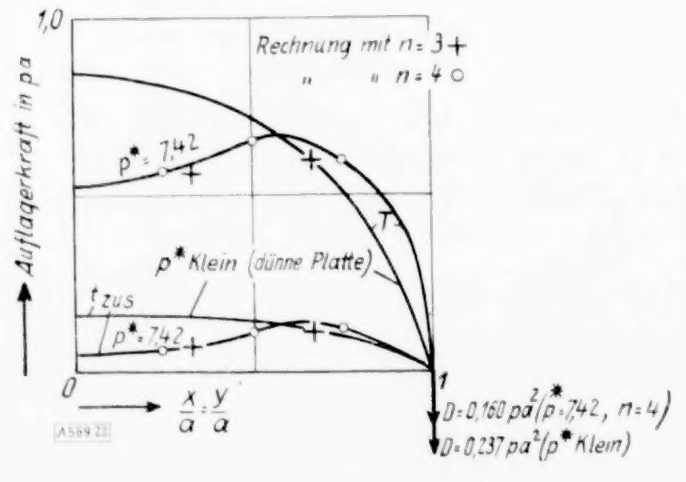


Abb. 22. Auflagerkräfte.

Die Tragfähigkeit einer Platte nimmt mit abnehmender Dicke bei kleinen Durchbiegungen proportional mit h^2, bei größeren Wölbungen aber langsamer ab. Sie verschwindet schließlich ganz, je mehr sich die Platte dem Zustand der vollkommen biegsamen Haut nähert. Wenn diese noch tragen soll, muß man sie schon am Rande festhalten. Sie verhält sich in dieser Hinsicht wie ein Seil, das erst tragfähig wird, wenn es an den Enden eingespannt ist.

Die günstige Wirkung der Wölbung zeigt sich auch in der Verminderung der Durchbiegung gegenüber der dünnen Platte. Für die gerechnete Belastung ergibt sich ein Biegepfeil, der im Vergleich zu dem der dünnen Platte nur halb so groß ist.

Schließlich müssen wir noch die Auflagerkräfte der sehr dünnen mit denen der Platte bei kleinen Durchbiegungen vergleichen, Abb. 22. Die ersteren verteilen sich ziemlich gleichmäßig über den Rand, während die letzteren von ihrem größten Wert in der Mitte rasch nach den Ecken zu abfallen. Die durch den Ersatz der Randdrillmomente auftretenden Auflagerkräfte ändern sich gegenüber denen der dünnen Platte nur unbedeutend.

II. Biegungs- und Dehnungsmessungen an einer sehr dünnen Stahlblechplatte.

1. Abmessungen der Versuchsplatte.

Für die Versuche wurde eine quadratische Stahlblechplatte von 600 mm Seitenlänge und einer mittleren Dicke von 3,15 mm benutzt. Die Abweichungen der Plattenstärke betrugen dabei höchstens 2,5 % vom Mittel. Der Plattenrand stand auf jeder Seite um 2,5 mm über die Auflagerkante über, so daß die Stützweite 595 mm betrug.

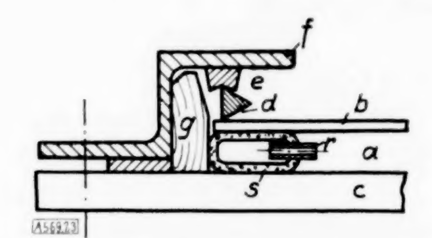
2. Beschreibung der Versuchseinrichtungen.

Die für die Untersuchung der Versuchsplatte benutzten Vorrichtungen hatten zwei Aufgaben zu erfüllen:

1. die Sicherstellung der freien Auflagerung und
2. die Erzielung eines überall gleichmäßig verteilten Druckes.

Die benutzten Anordnungen (s. Abb. 23, 24) gestatteten nur eine Belastung in einer Richtung, die erste (Abb. 23) ist nur für Überdruck-, die zweite (Abb. 24) nur für Unterdruckbelastung geeignet. In dem einen Fall biegt sich die Platte unter der Last nach oben, in dem anderen nach unten durch. Damit kann die erste Vorrichtung für Messungen auf der konvexen, die zweite für solche auf der konkaven Plattenseite benutzt werden.

Bei der ersten Anordnung (s. Abb. 23) ist der Druckraum *a* gegen die Grundplatte *c* und die Versuchsplatte *b* durch einen sehr elastischen Schlauch *s* in Verbindung mit Kitt abgedichtet. Zur Erzielung eines bis zur Auflagerkante gleichmäßig verteilten Druckes wurde der Hohlraum des Schlauches *s* durch Röhrchen *r* mit dem Druckraum *a* verbunden. Der Auflagerdruck wurde über eine Dreikantleiste *d* und Pfanne *e* von einem durch Schrauben an der Grundplatte *c* befestigten Z-Eisen *f* aufgenommen. Eine Holzleiste *g* sollte eine seitliche



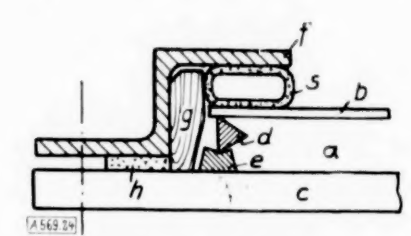
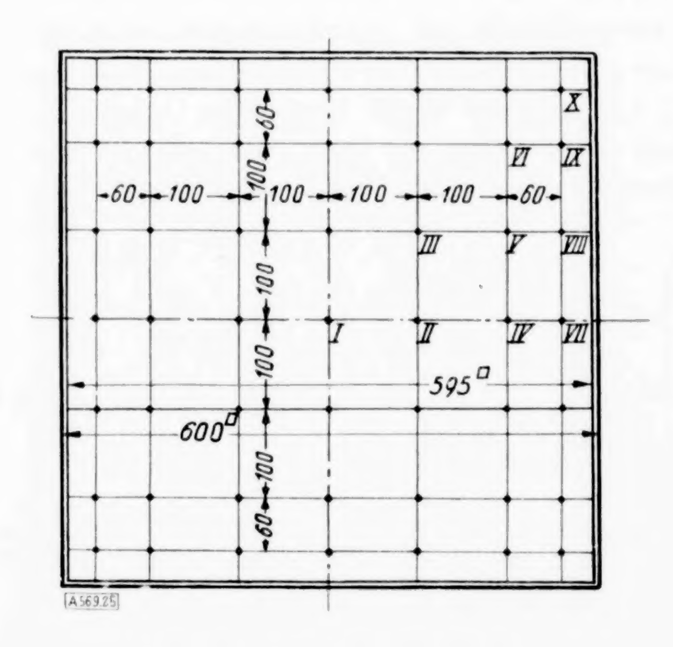


Abb. 23 und 24. Versuchsanordnungen 1 und 2.



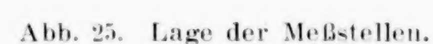


Abb. 25. Lage der Meßstellen.

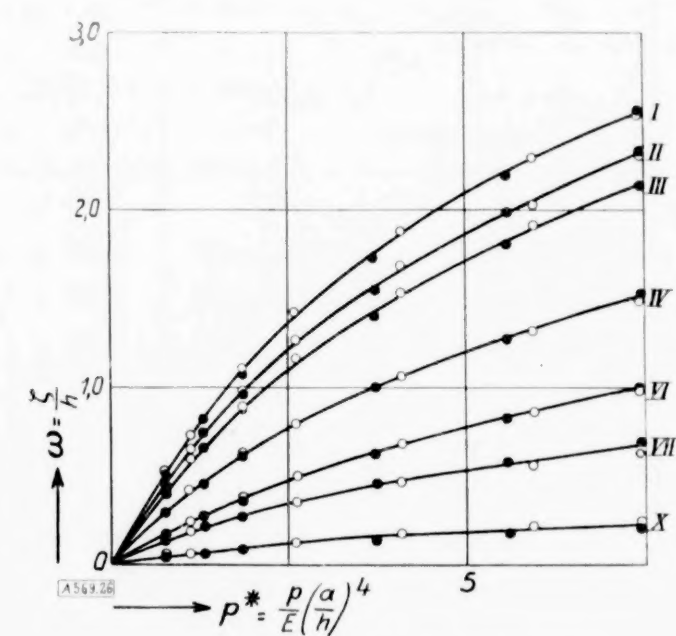


Abb. 26. Gemessene Durchbiegung.

Verschiebung der Versuchsplatte verhindern. Der Druck im Raum *a* wurde erzeugt von der Wasserleitung aus, an die die Apparatur angeschlossen war. Ein Standrohr gestattete den jeweiligen Wasserdruck abzulesen.

Bei der zweiten Stützung (s. Abb. 24) erfolgte die Abdichtung des Unterdruckraumes *a* an zwei Stellen: zwischen Grundplatte *c* und Rahmen *f* durch eine Flachdichtung *h* und zwischen Meßplatte *b* und Rahmen durch einen Schlauch *s*. Der Auflagerdruck wurde über die Dreikantleiste *d* und Pfanne *e* auf die Grundplatte *c* übertragen. Der Unterdruck im Raum *a* wurde erzeugt durch eine Wasserstrahlpumpe. Um den jeweiligen Unterdruck im Druckraum *a* messen zu können, stand die Vorrichtung in Verbindung mit dem einen Schenkel eines teilweise mit Wasser gefüllten *U*-Rohres.

3. Durchführung der Versuche.

Für die Durchführung der Versuche ist die genaue und richtige Festlegung des Belastungsnullpunktes von außerordentlicher Wichtigkeit, da man sonst die den Belastungen entsprechenden Formänderungen nicht richtig erhält.

Der Nullpunkt wurde nun bei der Belastung festgelegt, bei der die Versuchsplatte, sowohl unter Berücksichtigung des Eigengewichtes als auch einer an der Platte vorhandenen Wölbung, am wenigsten vom ebenen Zustand abwich. Hierfür war ein Druck von 10 cm Wassersäule erforderlich. Die gute Übereinstimmung der von der Ausgangsbelastung bei Überdruck und Unterdruck aufgenommenen Last-Durchbiegungskurven (Abb. 26) ist eine Bestätigung dafür, daß der Nullpunkt richtig gewählt wurde.

Die Festigkeit des Materials wurde annähernd durch einen Kugeldruckversuch festgestellt. Die Brinellhärte $H_{5/750/30} = 118{,}5$ kg/mm² ließ auf eine Zugfestigkeit von $\sigma_B = 0{,}36\, H = 42{,}7$ kg/mm² schließen, wobei eine Fließspannung von $\sigma_s \approx 0{,}6\, \sigma_B = 25{,}6$ kg/mm² zu erwarten ist.

Bei den Versuchen wurde nun der Belastungsbereich so beschränkt, daß auch für die größte Belastung das Hookesche Gesetz noch sicher gültig blieb. Die höchste Spannung, die bei der größten Belastung 200 cm WS gemessen wurde, betrug nämlich nur etwa 17 kg/mm². Sie bleibt also noch bedeutend unter der Fließspannung.

Die Durchbiegungen wurden an insgesamt 49 Stellen der Plattenoberfläche (Abb. 25) von einer feststehenden Brücke mittels Meßuhren, System Mahr, gemessen. Die Platte wurde dabei stufenweise bis zu einem Druck von 200 cm WS be- und entlastet. Die Ergebnisse von mehreren Belastungswechseln wurden gemittelt. Die so erhaltenen Werte wurden weiter für die zu den Koordinatenachsen und Diagonalen symmetrisch gelegenen Meßpunkte, da sie wegen der ungleichmäßigen Dicke und sonstigen Einflüssen nicht vollkommen übereinstimmten, zu Mittelwerten zusammengefaßt. Deren mittlere Abweichungen von den Beobachtungswerten betrugen z. B. für eine Belastung von 200 cm WS, wie aus Zahlentafel 3 hervorgeht, bis 1 % der größten Durchbiegung.

Zahlentafel 3.

Mittelwerte der Durchbiegungen und Dehnungen mit ihren mittleren Abweichungen von den einzelnen Beobachtungswerten für die zu den Symmetrielinien spiegelbildlich gelegenen Punkte. ($p = 200$ cm WS.)

Nr.	Durchbiegung ζ mm konvexe Seite	Durchbiegung ζ mm konkave Seite	mittlere Dehnung $\varepsilon_m \cdot 10^4$ cm konvexe Seite	mittlere Dehnung $\varepsilon_m \cdot 10^4$ cm konkave Seite	Winkelabweichung der Hauptspannung konvexe Seite	Winkelabweichung der Hauptspannung konkave Seite
I	8,106	8,062	3,09 ± 0,06	— 1,31 ± 0,09		
II	7,342 ± 0,031	7,283 ± 0,069	2,98 ± 0,08	— 1,62 ± 0,08		
III	6,748 ± 0,045	6,698 ± 0,069	3,09 ± 0,14	— 2,02 ± 0,12		
IV	4,820 ± 0,039	4,680 ± 0,065	2,30 ± 0,14	— 2,14 ± 0,16		
V	4,520 ± 0,044		2,61 ± 0,20	— 2,48 ± 0,18	± 3,6°	± 1,9°
VI	3,178 ± 0,023	3,113 ± 0,090	2,75 ± 0,19	— 2,99 ± 0,14		
VII	2,201 ± 0,040	2,006 ± 0,086	0,53 ± 0,25	— 1,60 ± 0,19		
VIII	2,135 ± 0,079		0,92 ± 0,24	— 1,82 ± 0,22	± 4,0°	± 2,3°
IX	1,589 ± 0,062		1,60 ± 0,24	— 1,98 ± 0,29	± 3,1°	± 2,1°
X	0,675 ± 0,045	0,785 ± 0,057	1,25 ± 0,13	— 1,30 ± 0,27		

In denselben Netzpunkten wurden auch Dehnungsmessungen vorgenommen. Benutzt wurde hierfür das Huggenberger Tensometer. Die Meßlänge betrug 2 cm und die Übersetzung 1200:1. Gemessen wurde in vier Richtungen unter 0°, 45°, 90° und 135°.

Auch die Dehnungen, die an symmetrisch gelegenen Punkten hätten gleich sein müssen, wurden zu Mittelwerten zusammengefaßt. Deren Abweichungen von den einzelnen Dehnungsmessungen waren, wie Zahlentafel 3 für eine Belastung von 200 cm WS zeigt, für die dem Rande am nächsten gelegenen Punkte am größten. Da man für die Berechnung der Hauptspannungen nur die Dehnungen von drei Richtungen benötigt, wurden wegen der Überbestimmung die Methoden der Ausgleichungsrechnung angewandt. Im einzelnen wurden für die Ermittlung der Hauptspannungen nebst ihren Richtungen folgende Formeln benutzt:

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{\frac{\pi}{4}} + \varepsilon_{\frac{\pi}{2}} + \varepsilon_{\frac{3\pi}{4}}}{4} \quad \ldots \ldots \quad (42),$$

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{\varepsilon_{\frac{\pi}{4}} - \varepsilon_{\frac{3\pi}{4}}}{\varepsilon_0 - \varepsilon_{\frac{\pi}{2}}} \quad \ldots \ldots \quad (43),$$

$$\gamma = \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_{\frac{\pi}{2}}}{2\cos 2\psi} = \frac{\varepsilon_{\frac{\pi}{4}} - \varepsilon_{\frac{3\pi}{4}}}{2\sin 2\psi} \quad \ldots \ldots \quad (44),$$

$$\sigma_m = \frac{m\,E}{m-1}\varepsilon_m \quad \ldots \ldots \quad (45),$$

$$\tau_1 = \frac{m\,E}{m+1}\gamma \quad \ldots \ldots \quad (46),$$

$$\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_m \pm \tau_1 \quad \ldots \ldots \quad (47).$$

Hierin bedeuten $\varepsilon_0, \varepsilon_{\frac{\pi}{4}}, \varepsilon_{\frac{\pi}{2}}, \varepsilon_{\frac{3\pi}{4}}$ die Dehnungen in den Richtungen $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$, ε_m die mittlere Dehnung, γ die maximale Schiebung, σ_m die mittlere Spannung, τ_1 die maximale Schubspannung, σ_1, σ_2 die Hauptspannungen und ψ den Winkel, den die größere Hauptspannung mit der x-Achse bildet. Mit Hilfe der Formeln (7) wurden die Ergebnisse dimensionslos angegeben.

Der Elastizitätsmodul wurde zu $E = 2150000$ kg/cm² und die Poissonsche Zahl zu $m = 3{,}3$ angenommen, Werte, die für Flußstahl als Durchschnittswerte gelten.

4. Ableitung der Formeln für die Zerlegung der gemessenen Spannungen nach Biege- und Gewölbespannungen.

a) Überlagerung zweier ebener Spannungszustände in einem Punkt.

Um die für einzelne Punkte auf einer Plattenoberfläche bei Über- und Unterdruckbelastung ermittelten Hauptspannungen in die Biege- und die Gewölbespannungen zu zerlegen, müssen wir noch die erforderlichen Beziehungen ableiten. Wir bestimmen zunächst für eine Stelle der Außenfläche den aus der Überlagerung der Biege- und Gewölbespannungen hervorgehenden neuen Spannungszustand, um dann rückwärts aus diesem die ersten Spannungen zu ermitteln.

Zwei in einem Punkt zu überlagernde Spannungszustände seien gegeben durch ihre Hauptspannungen σ'_1, σ'_2 und σ''_1, σ''_2. σ''_1 schließe mit σ'_1 den Winkel α ein (s. Abb. 27). Wir betrachten den Schnitt $v\,v$, zu dem die Normalspannung σ'_1 gehört. Der durch σ''_1, σ''_2 gekennzeichnete Spannungszustand liefert für diesen Schnitt die Spannungskomponenten

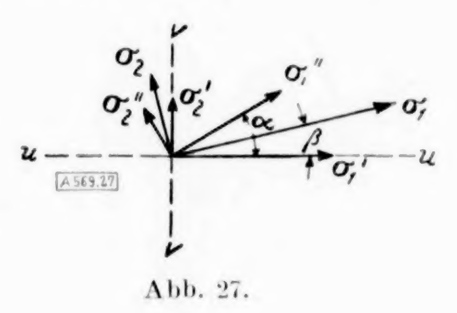


Abb. 27.

$$\sigma''_u = \frac{\sigma''_1 + \sigma''_2}{2} + \frac{\sigma''_1 - \sigma''_2}{2}\cos 2\alpha\,, \qquad \tau''_w = \frac{\sigma''_1 - \sigma''_2}{2}\sin 2\alpha\,.$$

Insgesamt erfährt der Schnitt $v\,v$ die Spannungen:

$$\sigma_u = \sigma'_1 + \frac{\sigma''_1 + \sigma''_2}{2} + \frac{\sigma''_1 - \sigma''_2}{2}\cos 2\alpha\,, \qquad \tau_w = \frac{\sigma''_1 - \sigma''_2}{2}\sin 2\alpha \quad \ldots \quad (48).$$

Für den Schnitt $u\,u$ erhält man in ähnlicher Weise

$$\sigma_v = \sigma'_2 + \frac{\sigma''_1 + \sigma''_2}{2} - \frac{\sigma''_1 - \sigma''_2}{2}\cos 2\alpha\,, \qquad \tau_w = \frac{\sigma''_1 - \sigma''_2}{2}\sin 2\alpha \quad \ldots \quad (49).$$

Aus σ_u, σ_v und τ_w ergeben sich mit Hilfe der Beziehung

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma_u + \sigma_v}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_u - \sigma_v}{2}\right)^2 + \tau_w^2} \quad \ldots \ldots \quad (50)$$

die Hauptspannungen des kombinierten Spannungszustandes:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma''_1 + \sigma''_2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{[\sigma'_1 - \sigma'_2 + (\sigma''_1 - \sigma''_2)\cos 2\alpha]^2 + [(\sigma''_1 - \sigma''_2)\sin 2\alpha]^2} \quad (51).$$

Der Winkel, den σ_1 mit σ'_1 bildet, ergibt sich aus

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{(\sigma''_1 - \sigma''_2)\sin 2\alpha}{\sigma'_1 - \sigma'_2 + (\sigma''_1 - \sigma''_2)\cos 2\alpha} \quad \ldots \ldots \quad (52).$$

Führt man die mittlere Spannung

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (53)$$

und die größte Schubspannung

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (54)$$

ein, so erhält man für obige Gleichungen:

$$\sigma_1, \sigma_2 = \sigma_m \pm \tau_1, \qquad \sigma_m = \sigma'_m + \sigma''_m, \qquad \tau_1 = \sqrt{(\tau'_1 + \tau''_1 \cos 2\alpha)^2 + (\tau''_1 \sin 2\alpha)^2} \quad (51\text{a})$$

und

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{\tau''_1 \sin 2\alpha}{\tau'_1 + \tau''_1 \cos 2\alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (52\text{a}).$$

b) Trennung der gemessenen Spannungen nach Biege- und Gewölbespannungen.

Durch die Messungen an der Platte sind die Spannungszustände für eine Reihe von Punkten auf der konkaven und konvexen Seite bekannt. Für dieselben Stellen lassen sich die linear mit dem Abstand von der Mittelfläche zunehmenden Biegespannungen und die über die ganze Dicke gleichmäßig verteilten Gewölbespannungen ermitteln. Die Spannungszustände seien gekennzeichnet durch ihre Hauptspannungen, auf der konvexen Seite durch $\sigma_{Z_1}, \sigma_{Z_2}$ und auf der konkaven durch $\sigma_{D_1}, \sigma_{D_2}$; die Biegespannungen durch $\sigma_{B_1}, \sigma_{B_2}$ und die Gewölbespannungen durch $\sigma_{G_1}, \sigma_{G_2}$. Die Winkel, die $\sigma_{G_1}, \sigma_{Z_1}$ und σ_{D_1} mit σ_{B_1} (s. Abb. 28) bilden, seien α, β und $\beta - \delta$, wenn δ der Winkel zwischen σ_{Z_1} und σ_{D_1} ist. Für die Bestimmung der Biege- und Gewölbehauptspannungen mit ihren Richtungen lassen sich mit Hilfe von (51a), (52a) folgende Gleichungen anschreiben:

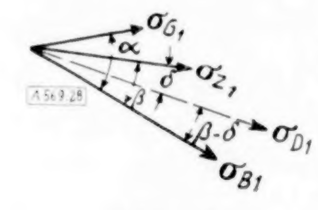


Abb. 28.

$$\frac{\sigma_{Z_1} + \sigma_{Z_2}}{2} = \sigma_{Z\,m} = \sigma_{B\,m} + \sigma_{G\,m} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (55),$$

$$\frac{\sigma_{D_1} + \sigma_{D_2}}{2} = \sigma_{D\,m} = -\sigma_{B\,m} + \sigma_{G\,m} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (56),$$

$$\tau_Z^2 = (\tau_G \cos 2\alpha + \tau_B)^2 + \tau_G^2 \sin^2 2\alpha \quad \ldots \ldots \ldots (57),$$

$$\tau_D^2 = (\tau_G \cos 2\alpha - \tau_B)^2 + \tau_G^2 \sin^2 2\alpha \quad \ldots \ldots \ldots (58),$$

$$\operatorname{tg} 2\beta = \frac{\tau_G \sin 2\alpha}{\tau_G \cos 2\alpha + \tau_B} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (59),$$

$$\operatorname{tg} 2(\beta - \delta) = \frac{\tau_G \sin 2\alpha}{\tau_G \cos 2\alpha - \tau_B} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (60),$$

$$\sigma_{G_1}, \sigma_{G_2} = \sigma_{G\,m} \pm \tau_G \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (61),$$

$$\sigma_{B_1}, \sigma_{B_2} = \sigma_{B\,m} \pm \tau_B \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (62).$$

Aus (55) und (56) ergibt sich:

$$\sigma_{G\,m} = \frac{\sigma_{Z\,m} + \sigma_{D\,m}}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (63)$$

und

$$\sigma_{B\,m} = \frac{\sigma_{Z\,m} - \sigma_{D\,m}}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (64).$$

Aus den Gl. (57) bis (60) folgt nach einer umständlichen Rechnung:

$$\tau_B, \tau_G = \frac{1}{2}\sqrt{\tau_Z^2 + \tau_D^2 \pm 2\,\tau_Z\,\tau_D \cos 2\delta} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (65)$$

und

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\,\tau_Z\,\tau_D}{\tau_Z^2 - \tau_D^2} \sin 2\delta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (66).$$

Aus Gl. (59) läßt sich dann β errechnen. Aus vorstehenden Gleichungen ergibt sich, daß die Richtungen der Biege- und Gewölbehauptspannungen sich allein durch die größten Schubspannungen und den Winkelunterschied zwischen σ_{D_1} und σ_{Z_1} bestimmen lassen.

5. Vergleich der Meßergebnisse mit den Rechnungen.

Da die Versuche im wesentlichen dasselbe wie die Rechnungen lieferten, können wir uns hier verhältnismäßig kurz fassen. Die Ergebnisse der Messungen sind in der Zahlentafel 4 zusammengestellt.

Bei sehr kleinen Belastungen, wenn die Durchbiegungen noch klein sind im Verhältnis zur Dicke, stimmen die Durchbiegung und Spannung der Plattenmitte sehr gut mit den rechnerischen Werten überein (s. Abb. 29 und 30). In Abb. 13 ist nun der errechnete Spannungsverlauf längs der Symmetrielinien mit dem gemessenen verglichen. Es zeigt sich besonders im mittleren Teil der Platte gute Übereinstimmung, während namentlich in den Richtungen der kleineren Hauptspannungen gegen den Rand hin größere Abweichungen vorkommen.

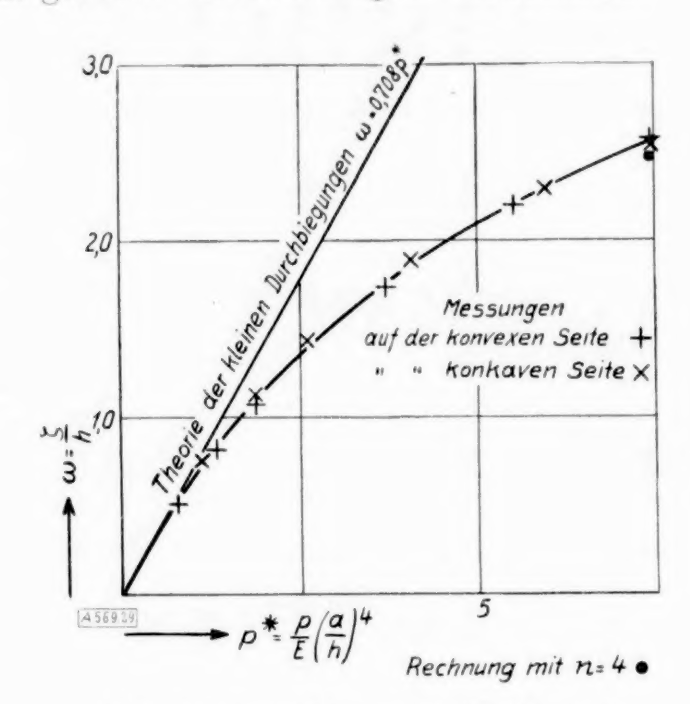


Abb. 29. Durchbiegung in Plattenmitte.

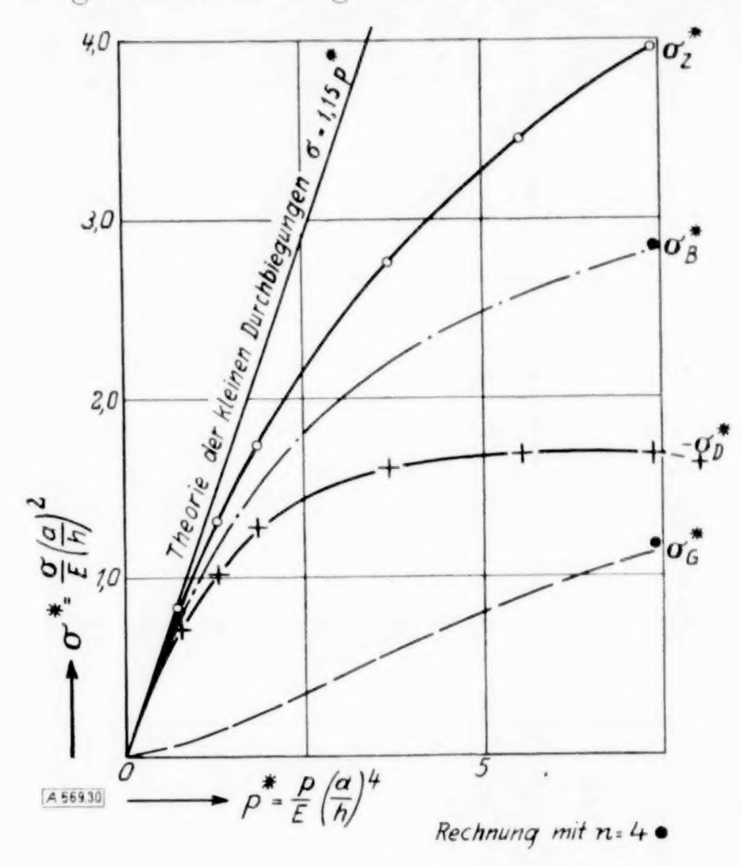


Abb. 30. Spannungen in Plattenmitte.

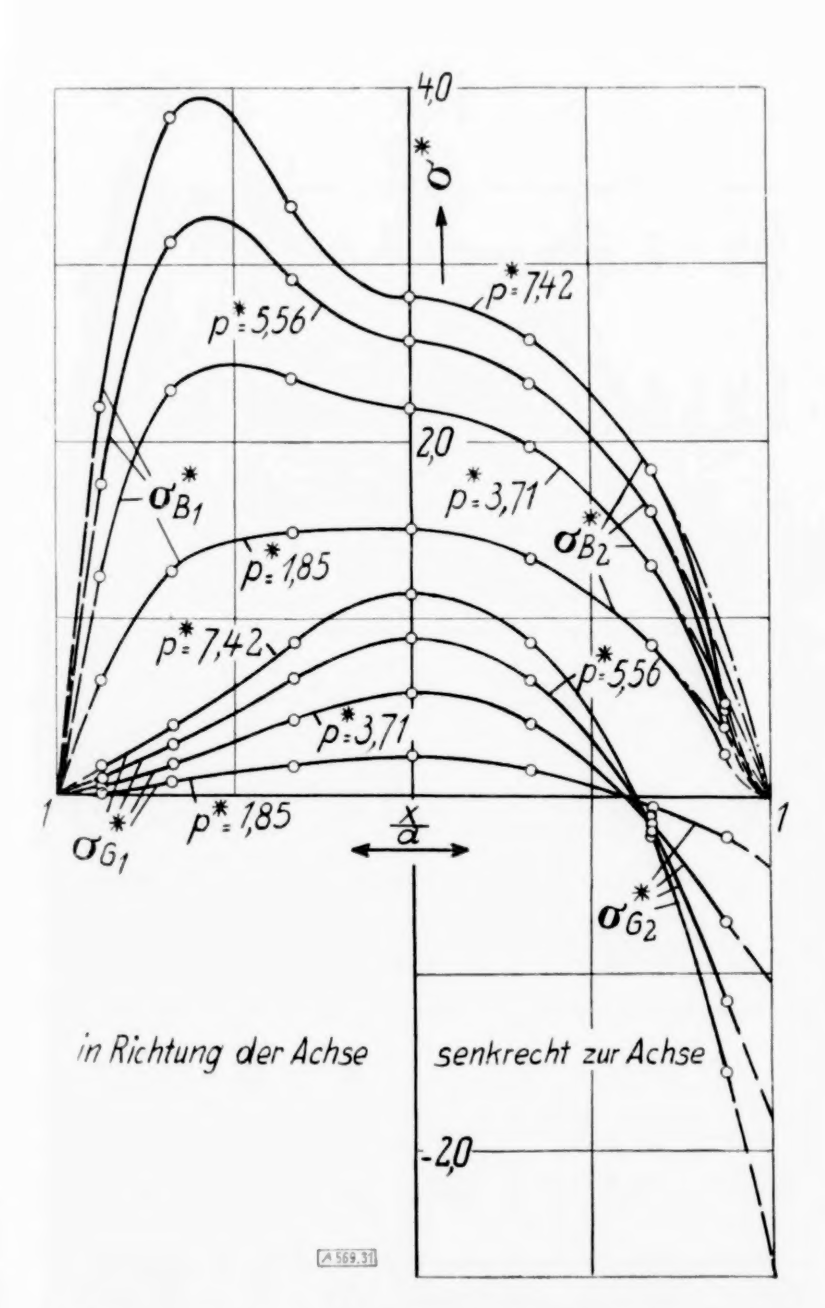


Abb. 31. Verteilung der Biege- und Gewölbespannungen längs der Achse.

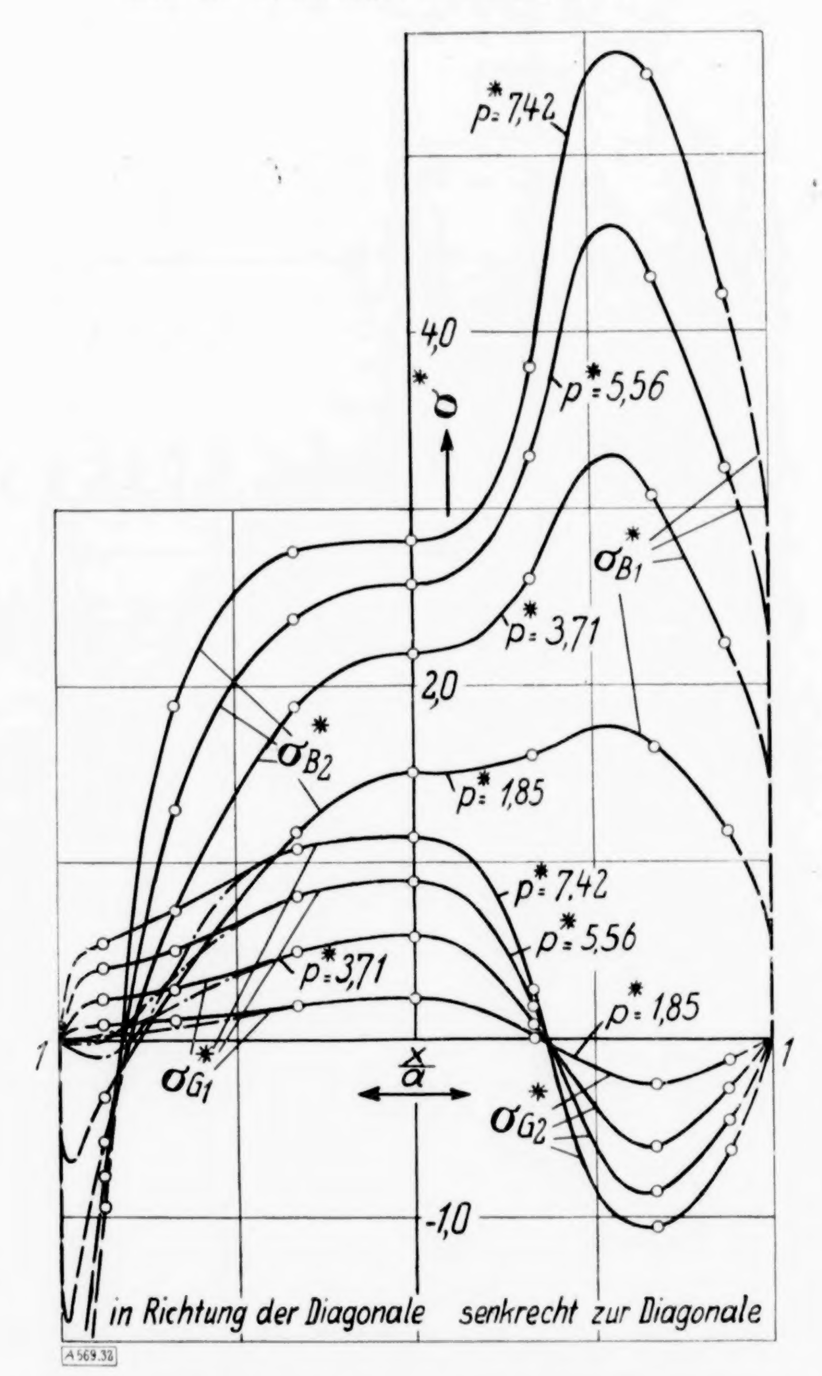


Abb. 32. Verteilung der Biege- und Gewölbespannungen längs der Diagonale.

Zahlentafel 4. Ergebnisse der Biegeversuche mit einer sehr dünnen freiaufliegenden quadratischen Platte, Abb. 25.

Punkt Nr.	Ordinaten $u=\frac{x}{a}$	Ordinaten $v=\frac{y}{a}$	Druck p^*	Durchbiegung ω konvexe Seite	Durchbiegung ω konkave Seite	Hauptspannungen auf der konvexen Seite σ^*_{Z1}	σ^*_{Z2}	ψ^*_Z	Hauptspannungen auf der konkaven Seite σ^*_{D1}	σ^*_{D2}	ψ^*_D	Gewölbespannungen σ^*_{G1}	σ^*_{G2}	ψ^*_G	Biegespannungen σ^*_{B1}	σ^*_{B2}	ψ^*_B
I	0	0	0,74	0,51	0,52	0,83	0,83	unbest.	— 0,70	— 0,70	unbest.	0,67	0,07	unbest.	0,77	0,77	unbest.
			1,30	0,82		1,31	1,31	„	— 1,01	— 1,01	„	0,15	0,15	„	1,16	1,16	„
			1,85	1,08	1,12	1,74	1,74	„	— 1,27	— 1,27	„	0,23	0,23	„	1,51	1,51	„
			3,71	1,73		2,76	2,76	„	— 1,61	— 1,61	„	0,58	0,58	„	2,19	2,19	„
			5,56	2,20		3,46	3,46	„	— 1,68	— 1,68	„	0,89	0,89	„	2,57	2,57	„
			7,42	2,57	2,55	3,96	3,96	„	— 1,68	— 1,68	„	1,14	1,14	„	2,82	2,82	„
II	0,336	0	0,74	0,45	0,45	0,71	0,66	0°	— 0,66	— 0,62	0°	0,02	0,02	0°	0,68	0,63	0°
			1,30	0,73		1,22	1,12	0°	— 1,01	— 0,93	0°	0,10	0,10	0°	1,12	1,02	0°
			1,85	0,96	0,99	1,66	1,49	0°	— 1,32	— 1,18	0°	0,17	0,15	0°	1,49	1,34	0°
			3,71	1,55		2,78	2,38	0°	— 1,92	— 1,56	0°	0,43	0,41	0°	2,36	1,97	0°
			5,56	1,99		3,59	2,99	0°	— 2,26	— 1,67	0°	0,67	0,66	0°	2,92	2,33	0°
			7,42	2,34	2,32	4,20	3,44	0°	— 2,44	— 1,70	0°	0,87	0,87	0°	3,32	2,58	0°
III	0,336	0,336	0,74	0,40	0,41	0,73	0,57	— 45°	— 0,72	— 0,48	— 45°	0,04	0,01	45°	0,73	0,52	— 45°
			1,30	0,65		1,20	0,97	— 45°	— 1,18	— 0,75	— 45°	0,11	0,01	45°	1,19	0,86	— 45°
			1,85	0,86	0,90	1,62	1,37	— 45°	— 1,59	— 0,97	— 45°	0,20	0,01	45°	1,60	1,17	— 45°
			3,71	1,40		2,69	2,38	— 45°	— 2,52	— 1,38	— 45°	0,50	0,09	45°	2,60	1,88	— 45°
			5,56	1,81		3,49	3,18	— 45°	— 3,10	— 1,56	— 45°	0,81	0,19	45°	3,30	2,38	— 45°
			7,42	2,14	2,13	4,08	3,84	— 45°	— 3,51	— 1,68	— 45°	1,08	0,28	45°	3,80	2,76	— 45°
V	0,672	0	0,74	0,29	0,29	0,54	0,39	0°	— 0,51	— 0,41	0°	0,01	— 0,01	0°	0,53	0,40	0°
			1,30	0,46		0,95	0,61	0°	— 0,86	— 0,68	0°	0,05	— 0,03	0°	0,91	0,64	0°
			1,85	0,61	0,63	1,35	0,79	0°	— 1,19	— 0,91	0°	0,08	— 0,06	0°	1,27	0,85	0°
			3,71	1,00		2,48	1,15	0°	— 2,10	— 1,45	0°	0,18	— 0,15	0°	2,29	1,30	0°
			5,56	1,28		3,42	1,42	0°	— 2,84	— 1,81	0°	0,29	— 0,19	0°	3,13	1,61	0°
			7,42	1,53	1,49	4,25	1,62	0°	— 3,44	— 2,06	0°	0,40	— 0,22	0°	3,84	1,84	0°
V	0,672	0,336	0,74	0,26		0,59	0,32	— 34,9°	— 0,65	— 0,21	— 43,2°	0,06	— 0,03	34,1°	0,62	0,27	— 40°
			1,30	0,41		1,00	0,55	— 29,1°	— 1,17	— 0,37	— 42,8°	0,11	— 0,09	31,2°	1,07	0,46	— 37,6°
			1,85	0,55		1,38	0,74	— 25,9°	— 1,59	— 0,53	— 42,1°	0,15	— 0,15	31,0°	1,47	0,65	— 36,0°
			3,71	0,91		2,47	1,35	— 17,0°	— 2,88	— 1,00	— 40,6°	0,33	— 0,36	31,3°	2,62	1,23	— 31,8°
			5,56	1,20		3,46	1,89	— 10,9°	— 3,86	— 1,39	— 39,0°	0,54	— 0,49	31,4°	3,55	1,75	— 28,3°
			7,42	1,44		4,37	2,32	— 7,0°	— 4,66	— 1,70	— 37,6°	0,75	— 0,58	31,3°	4,34	2,18	— 25,4°

Zahlentafel 4 (Fortsetzung).

Punkt Nr.	Ordinaten $u=\frac{x}{a}$	Ordinaten $v=\frac{y}{a}$	Druck p^*	Durchbiegung ω konvexe Seite	Durchbiegung ω konkave Seite	Hauptspannungen auf der konvexen Seite σ^*_{Z1}	σ^*_{Z2}	ψ^*_Z	Hauptspannungen auf der konkaven Seite σ^*_{D1}	σ^*_{D2}	ψ^*_D	Gewölbespannungen σ^*_{G1}	σ^*_{G2}	ψ^*_G	Biegespannungen σ^*_{B1}	σ^*_{B2}	ψ^*_B
VI	0,672	0,672	0,74	0,17	0,18	0,65	0,10	— 45°	— 0,73	— 0,02	— 45°	0,04	— 0,04	45°	0,69	0,06	— 45°
			1,30	0,27		1,04	0,22	— 45°	— 1,33	— 0,05	— 45°	0,08	— 0,13	45°	1,18	0,14	— 45°
			1,85	0,36	0,38	1,40	0,38	— 45°	— 1,90	— 0,12	— 45°	0,12	— 0,25	45°	1,65	0,25	— 45°
			3,71	0,63		2,48	1,04	— 45°	— 3,66	— 0,43	— 45°	0,29	— 0,60	45°	3,07	0,73	— 45°
			5,56	0,83		3,46	1,81	— 45°	— 5,16	— 0,80	— 45°	0,51	— 0,85	45°	4,31	1,30	— 45°
			7,42	1,01	0,99	4,41	2,64	— 45°	— 6,50	— 1,15	— 45°	0,73	— 1,05	45°	5,46	1,89	— 45°
VII	0,875	0	0,74	0,14	0,14	0,26	0,09	0°	— 0,26	— 0,13	0°	0,00	— 0,02	0°	0,26	0,11	0°
			1,30	0,22		0,46	0,06	0°	— 0,46	— 0,29	0°	0,00	— 0,11	0°	0,46	0,17	0°
			1,85	0,28	0,28	0,66	0,00	0°	— 0,65	— 0,47	0°	0,00	— 0,23	0°	0,65	0,24	0°
			3,71	0,46		1,29	— 0,31	0°	— 1,19	— 1,09	0°	0,05	— 0,70	0°	1,24	0,39	0°
			5,56	0,59		1,86	— 0,66	0°	— 1,66	— 1,63	0°	0,10	— 1,15	0°	1,76	0,49	0°
			7,42	0,70	0,64	2,38	— 1,02	0°	— 2,06	— 2,03	0°	0,17	— 1,55	0°	2,20	0,52	0°
VIII	0,875	0,336	0,74	0,13		0,38	— 0,01	— 32,8°	— 0,49	— 0,02	— 46,8°	0,02	— 0,09	16,8°	0,43	0,01	— 40,5°
			1,30	0,20		0,62	— 0,04	— 30,4°	— 0,85	— 0,04	— 47,3°	0,03	— 0,19	15,9°	0,72	0,02	— 39,8°
			1,85	0,26		0,82	— 0,05	— 27,5°	— 1,22	— 0,10	— 47,4°	0,04	— 0,32	17,0°	0,99	0,05	— 38,8°
			3,71	0,43		1,47	— 0,09	— 19,8°	— 2,23	— 0,34	— 48,4°	0,12	— 0,72	15,8°	1,74	0,23	— 35,6°
			5,56	0,57		2,02	— 0,15	— 14,6°	— 3,06	— 0,66	— 48,8°	0,18	— 1,10	15,5°	2,34	0,46	— 32,6°
			7,42	0,68		2,60	— 0,24	— 10,6°	— 3,68	— 0,98	— 49,1°	0,29	— 1,44	14,3°	2,84	0,67	— 29,3°
IX	0,875	0,672	0,74	0,09		0,54	— 0,10	— 47,4°	— 0,63	+ 0,13	— 47,5°	0,01	— 0,04		0,59	— 0,11	
			1,30	0,14		0,89	— 0,11	— 47,9°	— 1,09	+ 0,20	— 48,0°	0,04	— 0,10		0,99	— 0,16	
			1,85	0,19		1,19	— 0,12	— 47,7°	— 1,58	+ 0,26	— 48,0°	0,07	— 0,20	41,6°	1,39	— 0,19	— 47,9°
			3,71	0,31		2,09	0,01	— 46,1°	— 3,08	+ 0,41	— 48,3°	0,19	— 0,49	38,4°	2,58	— 0,19	— 47,5°
			5,56	0,42		2,90	0,20	— 44,1°	— 4,34	+ 0,42	— 48,2°	0,32	— 0,74	36,7°	3,62	— 0,10	— 46,7°
			7,42	0,50		3,62	0,47	— 42,3°	— 5,49	+ 0,42	— 47,7°	0,48	— 0,96	36,4°	4,54	+ 0,03	— 45,9°
X	0,875	0,875	0,74	0,04	0,05	0,46	— 0,12	— 45°	— 0,51	+ 0,17	— 45°	0,03	— 0,03	45°	0,49	— 0,14	— 45°
			1,30	0,06		0,77	— 0,17	— 45°	— 0,91	+ 0,31	— 45°	0,07	— 0,07	45°	0,84	— 0,24	— 45°
			1,85	0,08	0,10	1,07	— 0,23	— 45°	— 1,29	+ 0,42	— 45°	0,09	— 0,11	45°	1,18	— 0,32	— 45°
			3,71	0,14		1,96	— 0,34	— 45°	— 2,50	+ 0,80	— 45°	0,23	— 0,27	45°	2,24	— 0,57	— 45°
			5,56	0,18		2,78	— 0,37	— 45°	— 3,68	+ 1,18	— 45°	0,41	— 0,45	45°	3,23	— 0,77	— 45°
			7,42	0,21	0,25	3,58	— 0,39	— 45°	— 4,82	+ 1,49	— 45°	0,55	— 0,62	45°	4,21	— 0,94	— 45°

Sobald die Wölbungen der Platte die Größenordnung der Dicke erreichen, nehmen die Durchbiegungen und Spannungen, wie die Abb. 29 und 30 für die Plattenmitte zeigen, nicht mehr verhältnisgleich mit der Belastung zu, sondern allmählich immer langsamer. Da für die größte Versuchsbelastung $p^* = 7{,}42$ die Rechnungen durchgeführt wurden, ist hier ein Vergleich möglich. In der Zahlentafel 5 sind für die Plattenmitte die Versuchsergebnisse den durch Extrapolation der Näherungen gefundenen wahren Werten der strengen Lösung ($n = \infty$)

Zahlentafel 5.

Versuchs- und Rechenergebnisse für die Plattenmitte.

$p^* = 7{,}42$.

	Versuchsergebnis	Rechenergebnis	
		$n = \infty$ (extrapoliert)	$n = 4$
Durchbiegung ω	2,56	2,56	2,47
Biegespannung σ_B^*	2,82	2,91	2,85
Gewölbespannung σ_G^*	1,14	1,23	1,18

gegenübergestellt. Danach stimmte die beobachtete Durchbiegung mit dem extrapolierten Rechnungswert überein, während die Spannungen etwas kleiner waren als die berechneten. In den Abb. 8 und 9 sind für dieselbe Belastung die längs der Symmetrielinien gemessenen Spannungen mit den errechneten verglichen. Man erkennt, daß teilweise nach dem Rande zu auch größere Unterschiede zwischen Versuch und Rechnung vorkommen. Dies gilt vor allem für die kleineren Biegehauptspannungen längs der Achsen und für die in Richtung der Diagonalen wirkenden Gewölbespannungen. In den Abb. 31 und 32 ist der längs der Achse und der Diagonale gemessene Spannungsverlauf für verschiedene Belastungen dargestellt. Dabei sind die ausgezogen gezeichneten Versuchskurven im Randgebiet, wo sie nicht durch Meßpunkte festgelegt sind, gestrichelt fortgesetzt. Soweit die rechnerisch zu erwartenden Kurven dem Charakter nach von den Versuchsergebnissen abweichen, sind sie strichpunktiert gezeichnet. Sie zeigen, daß die Abweichungen vom Versuch auch bei den kleineren Belastungen in der gleichen Richtung liegen wie bei der schon beschriebenen Belastung $p^* = 7{,}42$. Aus den Schaubildern erkennt man deutlich, wie allmählich außerhalb der Mitte mit steigender Belastung immer größer werdende Spannungsmaxima entstehen.

Die Richtungen der Hauptspannungen ändern sich mit der Belastung am stärksten auf der konvexen Seite und am wenigsten in der Mittelfläche. Für den Meßpunkt V wird dies in den Abb. 33, 34 und 35 gezeigt. In den beiden ersten Schaubildern sind für zwei Be-

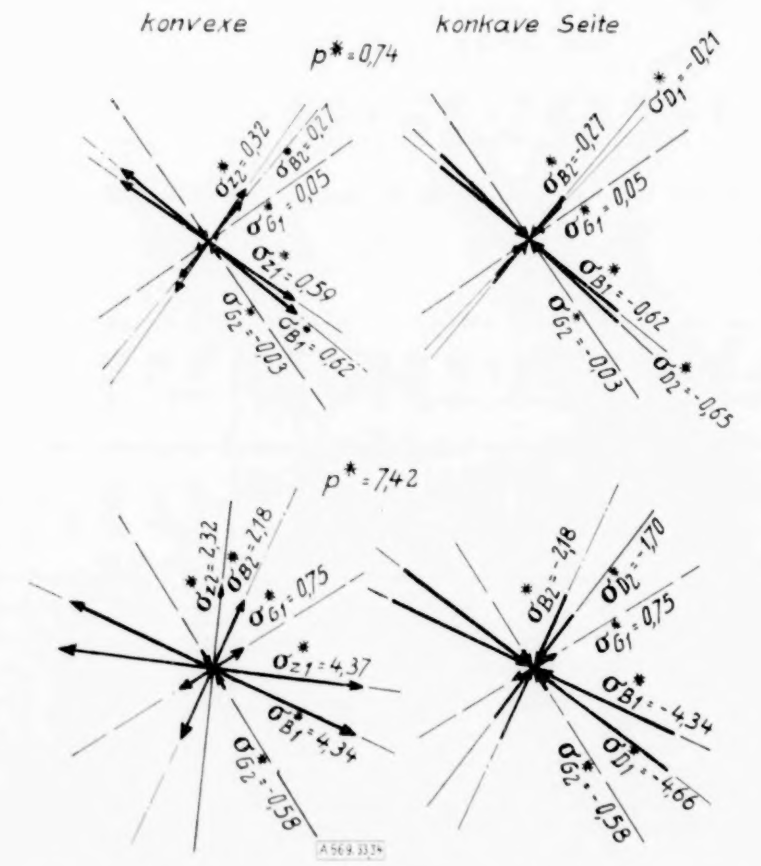


Abb. 33 und 34. Spannungszustände im Meßpunkt V.

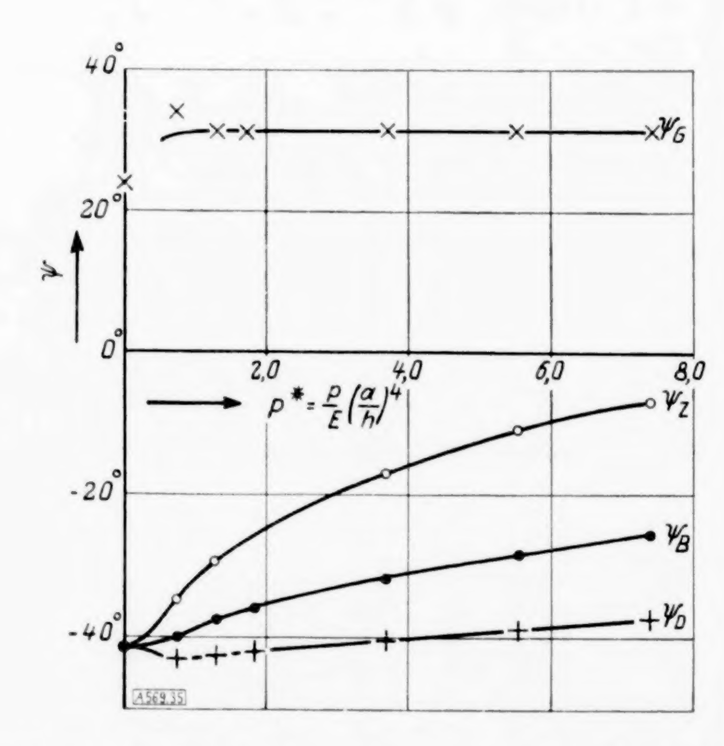


Abb. 35. Winkel der Hauptspannungen in Abhängigkeit von der Belastung für den Meßpunkt V.

lastungen die gemessenen Spannungszustände und ihre Zerlegungen nach den Biege- und Gewölbespannungen dargestellt. In Abb. 35 sind außerdem die Neigungen der Hauptspannungsrichtungen gegen die u-Achse für die Biege- und Gewölbespannungen und ihre resultierenden Spannungen in Abhängigkeit von der Belastung aufgetragen, wobei für die Grenzlast „Null" die rechnerischen Ergebnisse eingetragen wurden. Diese fügen sich gut in den Verlauf der Kurven ein.

In Abb. 36 sind für die größte Belastung in den Meßpunkten der Platte die versuchs- und rechnungsmäßig erhaltenen Spannungszustände miteinander verglichen. In jedem Meßpunkt sind die gemessenen Hauptspannungsrichtungen und eine errechnete Trajektorie eingetragen. Ein Vergleich der Richtung dieser mit der entsprechenden gemessenen Hauptspannungsrichtung zeigt für alle Meßstellen gute Übereinstimmung. Die Größe der Hauptspannungen nach dem Versuch und nach der Rechnung mit $n = 4$ (eingeklammert) sind zahlenmäßig einander gegenübergestellt. Die gemessenen Spannungen sind in der Mehrzahl kleiner als die errechneten. Auf den Oberflächen zeigen sich die Abweichungen besonders in den Richtungen der kleineren Hauptspannungen. Allerdings stimmen die mit Hilfe der zweiten Stützung nach Abb. 24 auf der konkaven Seite längs der Diagonalen gemessenen Hauptspannungen (Abb. 36d) gut mit den Rechnungswerten überein. Hierbei waren die Ecken mit Hilfe von Haken, die in die Grundplatte eingeschraubt waren, an die Stützschneiden angedrückt, da sie offensichtlich im unbelasteten Zustand sonst nicht auflagen. (Die bei abstehenden und anliegenden Ecken gemessenen Durchbiegungen wiesen keinen wesentlichen Unterschied auf.)

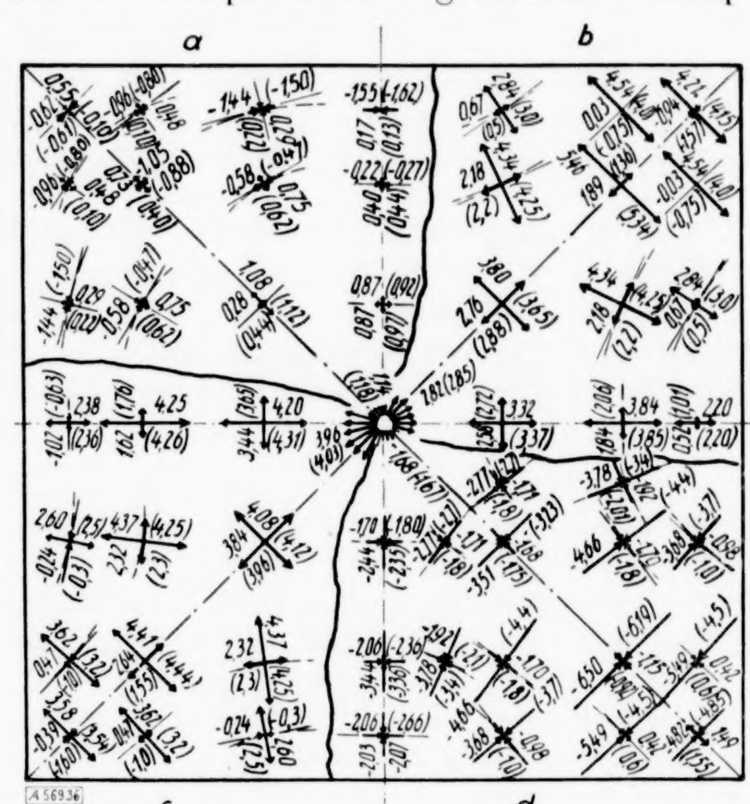


Abb. 36. Hauptspannungen σ_1^*, σ_2^* nach Versuch und Rechnung ($p^* = 7{,}42$).
a) Gewölbespannungen, b) Biegespannungen, c) Spannungen auf der konvexen Seite, d) Spannungen auf der konkaven Seite. (Erste Zahl Versuchswert, zweite Zahl in Klammern Rechnungswert für $n = 4$.)

Bei der Stützung nach Abb. 23 konnten die Ecken sich abheben, da hier nur der Gummischlauch die Platte leicht andrückte. Die bei dieser Anordnung im Eckgebiet in Richtung der Diagonalen gemessenen Spannungen waren im Vergleich zu den rechnerisch geforderten Werten nur sehr mäßig. Da wir bei angedrückten Ecken auf der konkaven Seite bessere Übereinstimmung zwischen Versuch und Rechnung gefunden haben, muß die Ursache hierfür ein Abheben der Platte in den Ecken gewesen sein. Durch das Aufbiegen der Ecken krümmt sich die Platte parallel zur Diagonalen weniger, als wenn sie in den Ecken angedrückt wäre. Sie erfährt deswegen dort auch geringere Spannungen.

Die Größe der Plattenaufbiegung konnte nicht festgestellt werden, da die Ecken für Messungen unzugänglich waren. Aus dem Verlauf der Durchbiegungen in einiger Entfernung von den Ecken läßt sich jedoch der Schluß ziehen, daß die Platte sich an den Ecken kaum merklich aufheben dürfte. Das liegt daran, daß die Eckkraft, die eine Verwölbung bewirkt, nicht sehr groß ist.

Die Versuche scheinen die Richtigkeit der Annahme zu bestätigen, daß durch den Ersatz der Randschubspannungen durch Auflagerkräfte nur die Spannungen in einem schmalen Streifen längs des Randes geändert werden, besonders wenn man berücksichtigt, daß auch bei der Stützung nach Abb. 24 die rechnerisch angesetzten Randbedingungen nicht ganz erfüllt waren. Denn eine genaue ebene Auflagerung ist wegen der unvermeidlichen Unebenheiten der Platte, die übrigens schwach gekrümmt war, nur sehr schwer zu erzielen. Außerdem gab die Stützung, besonders bei der Abdichtung nach Abb. 23, unter dem Einfluß der Belastung etwas nach. Die Nachgiebigkeit betrug dort bei der größten Belastung im Mittel maximal 0,7 % der größten Durchbiegung. Dadurch werden die Durchbiegungen der Platte etwas vergrößert, durch den überstehenden Rand dagegen etwas vermindert.

Es mögen schließlich noch folgende Punkte nicht unerwähnt bleiben, wenn sie auch vielleicht die Ergebnisse nur im geringen Maße beeinflußt haben. Die untersuchte Platte war nicht ausgeglüht. Es können daher in ihr Eigenspannungen gewirkt haben, die den Formänderungszustand der Platte etwas verändert haben.

Kleinere Abweichungen zwischen Versuch und Rechnung können schließlich auch auf die nicht genaue Kenntnis der Werkstoffestwerte zurückgeführt werden.

6. Berechnung der größten Beanspruchung für die sehr dünne Platte.

Wir sahen, daß die Übereinstimmung der errechneten Werte mit den beobachteten für die freigelagerte gleichförmig belastete quadratische Platte bei großen Ausbiegungen befriedigend ist. Es erhebt sich nun die Frage, ob sich bei Zugrundelegung der Rechnungen und Versuchsergebnisse eine einfache Berechnung für die Bemessung ebener Platten mit Gewölbespannungen angeben läßt. Wir wollen hierbei die Höchstspannung als maßgebend für die größte Beanspruchung ansehen. Wir berechnen sie nach der Formel

$$\sigma = \frac{1{,}15\, p\, a^2}{C\, h^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (67),$$

welche sich von der für die dünne Platte nur durch den Faktor C im Nenner unterscheidet. Die Größe C gibt das Verhältnis der wirklichen Tragfähigkeit der sehr dünnen Platte zu der rechnerisch nach der Theorie der kleinen Durchbiegungen sich ergebenden an. Sie ist in Abb. 37 in Abhängigkeit von der Belastungszahl $p^* = \frac{p}{E}\left(\frac{a}{h}\right)^4$ angegeben.

Damit läßt sich die größte Beanspruchung für jede sehr dünne quadratische Platte bei freier Auflagerung und gleichmäßig verteilter Belastung berechnen. Die zugehörige größte Durchbiegung $\zeta = h\,\omega$ erhält man aus Abb. 29.

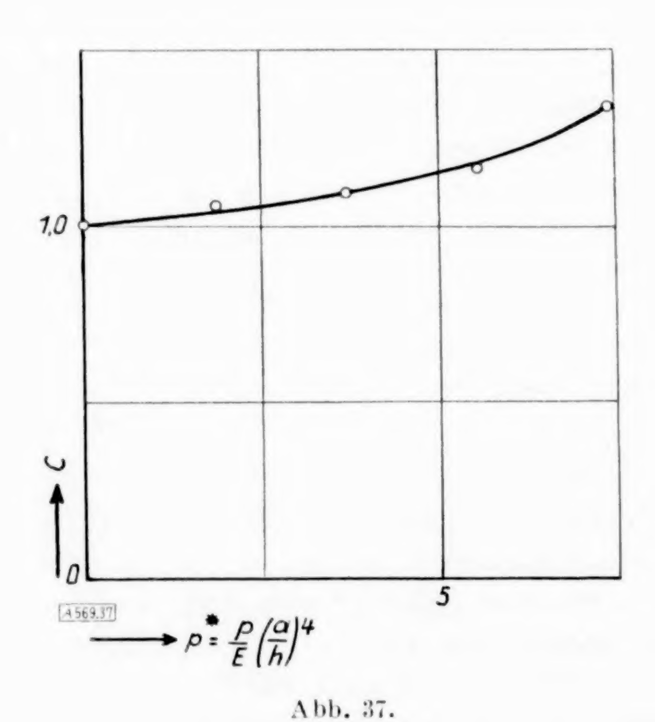


Abb. 37.

Zusammenfassung. Es wurde eine sehr dünne quadratische Platte bei freier Auflagerung am Rande und gleichmäßig verteilter Last rechnerisch und experimentell behandelt. Für eine Belastung, die einen sicheren Vergleich mit dem Versuch gestattete, wurde bei großen Durchbiegungen der Platte Näherungslösungen der für dieses Problem gültigen Differentialgleichungen mit Hilfe der Differenzenrechnung aufgestellt, die schon bei einer Teilung gleich einem Achtel der Seitenlänge nur wenige Hundertteile von den genauen Werten abweichen dürften. Die rechnerischen Ergebnisse zeigen, daß bei großen Ausbiegungen in der Platte neben den Biegespannungen über die ganze Dicke gleichmäßig verteilte Gewölbespannungen auftreten. Sie bestehen im mittleren Teil der Platte aus Zugspannungen, die die Platte dort wesentlich von Biegungsarbeit entlasten. Im Randgebiet fehlt diese Entlastung. So kommt es, daß bei großen Durchbiegungen die größten Spannungen nicht mehr in der Mitte der Platte, sondern weiter außerhalb in einer ringförmigen Zone liegen. Im ganzen unterliegt die Platte wegen des günstigen Einflusses der Wölbung kleineren Spannungen und Durchbiegungen, als die gewöhnliche Theorie ergibt. Damit ist ihre Tragfähigkeit größer.

Die Versuchsergebnisse zeigen sowohl bei kleinen als auch bei großen Durchbiegungen, besonders im mittleren Teil der Platte, gute Übereinstimmung mit den theoretischen Ergebnissen. Die teilweise größeren Abweichungen im Randgebiet lassen sich auf die unvollkommene Erfüllung der rechnerisch angesetzten Auflagerbedingungen zurückführen.

Zum Schluß konnte unter Benutzung der Versuchsergebnisse ein einfaches Verfahren zur Berechnung der Größtbeanspruchung von sehr dünnen Platten bei den vorliegenden Randbedingungen angegeben werden. 569

Vibration of an infinite elliptic cylinder in a viscous liquid.

By Monohar Ray, Science College, Calcutta.

Schwingungen eines unendlichen elliptischen Zylinders in einer zähen Flüssigkeit.

Zusammenfassung. Es wird die zweidimensionale Strömung untersucht, welche sich einstellt, wenn ein elliptischer Zylinder in einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit senkrecht zu seiner Achse eine periodische Bewegung ausführt, und zwar werden langsame Bewegungen betrachtet, für welche die Differentialgleichungen linearisiert werden können. — Durch Einführung einer Stromfunktion $e^{int}\psi(x, y)$ wird die Kontinuitätsgleichung erfüllt. Für ψ erhält man eine partielle Differentialgleichung vierter Ordnung. Die Lösung setzt sich aus einer Potentialfunktion ψ_1 und einer Funktion ψ_2 zusammen, die einer Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt. Durch Einführung elliptischer Koordinaten ξ und η gelingt es, die partielle Differentialgleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen vom Typus der Mathieuschen Differentialgleichungen aufzuspalten. Für den Kreiszylinder ist die Integration exakt durchführbar; die elliptischen Koordinaten gehen hier in gewöhnliche Polarkoordinaten r, ϑ über und die Lösung hat die Form $F(r)\sin\vartheta$, wo $F(r)$ sich aus Besselschen und elementaren Funktionen zusammensetzt. Für den elliptischen Zylinder ergibt sich als Näherungslösung für langsame Bewegung eine analoge Form der Lösung $\psi = F(\xi)\cdot\sin\eta$, wo $F(\xi)$ sich wieder aus Besselschen und elementaren Funktionen zusammensetzt. Für diese Näherungslösung wird die Druckverteilung und die Gesamtkraft auf die Längeneinheit des Zylinders berechnet.

1. Introduction. In a paper published elsewhere[1]) I have considered the problem of small vibration of an infinite cylinder in a viscous liquid and have calculated the resistance experienced by unit length of a circular cylinder as well as the work done by the forces exerted by the liquid in one vibration. The method applied was that of Lorentz in solving the corresponding threedimensional problem of the vibration of a sphere. This method is suitable for a symmetrical body such as a sphere or a circular cylinder and meets with considerable difficulty even for an elliptic cylinder. In the present paper it is shown that for small values of a characteristic constant $(a\,c)$ analogous to Reynold's number, the case of an elliptic cylinder can be successfully treated by using Stoke's stream function, a method which is found to give the results for circular cylinder very quickly. The elliptic cylinder ultimately leads to Mathieu equations and the first approximation suffices to get the necessary fit at the boundary.

Taking the case of an infinite cylinder vibrating in the direction of x-axis, the motion of the liquid, neglecting product terms, satisfies the equations

$$\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla_1^2 u, \qquad \varrho\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla_1^2 v \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

and

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

On the surface of the cylinder we should have

$$u = u_0 e^{int}, \quad v = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

where real n corresponds to the frequency of non-damped vibration.

Introducing the stream function ψ by means of the equations

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

and eliminating p we get from (1), the equation for ψ in the form

$$\left(\nabla_1^2 - \frac{\varrho}{\mu}\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla_1^2 \psi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

[1]) Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, Volume XXV, 1933.

2. Solution of the equation. Since the operators ∇_1^2 and $\nabla_1^2 - \frac{\varrho}{\mu}\frac{\partial}{\partial t}$ are commutative, a solution of (4) can be constructed by compounding the solutions ψ_1 and ψ_2, where ψ_1 and ψ_2 satisfy the equations

$$\nabla_1^2 \psi_1 = 0 \quad \text{and} \quad \left(\nabla_1^2 - \frac{\varrho}{\mu}\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi_2 = 0 \qquad (5).$$

Thus we put

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \qquad (6),$$

where ψ_1 and ψ_2 satisfy the equations (5).

Since ψ as well as ψ_1 and ψ_2 vary harmonically as e^{int}, we get from (5), omitting the exponential term,

$$\nabla_1^2 \psi_1 = 0 \qquad (7)$$

and

$$\nabla_1^2 \psi_2 - \frac{i n \varrho}{\mu}\psi_2 = 0 \qquad (8).$$

3. Application to circular cylinder. In the case of a circular cylinder, we assume as solution of (7)

$$\psi_1 = C\frac{\operatorname{Sin}\vartheta}{r} \qquad (9),$$

where C is a constant.

To find the solution of (8), we first transform the equation to polar coordinates and get

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi_2}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \vartheta^2} - i a^2 \psi_2 = 0 \qquad (10),$$

where $$a^2 = \frac{n\varrho}{\mu}.$$

Putting $\psi_2 = R(r)\operatorname{Sin}\vartheta$, where $R(r)$ is a function of r only, (10) comes out as

$$\frac{d^2 R}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{d R}{d r} - \left(i a^2 + \frac{1}{r^2}\right)R = 0 \qquad (11).$$

For the solution of (11), we take, since the liquid is at rest at infinity,

$$R = b K_1(\sqrt{-i}\, a r) \qquad (12)$$

where b is some constant and K is the symbol for solution of Bessel's equation with imaginary argument.

Thus a solution of (4) can be obtained in the form

$$\psi = \left[b K_1(\sqrt{-i}\, a r) + \frac{c}{r}\right]\operatorname{Sin}\vartheta \qquad (13).$$

This value of ψ agrees with the one found in my previous paper and is suitable for application to a circular boundary.

4. Application to elliptic cylinder. We shall now show that this simple method can also be successfully applied to the case of an elliptic cylinder.

Using the transformation

$$x + i y = c \operatorname{Cosh}(\xi + i\eta),$$

so that

$$x = c\operatorname{Cosh}\xi \operatorname{Cos}\eta, \quad y = c \operatorname{Sinh}\xi \operatorname{Sin}\eta \qquad (14).$$

equations (7) and (8) are transformed into

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \eta^2} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

and

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \eta^2} - \frac{1}{2}\, i\, \alpha^2 c^2 (\operatorname{Cosh} 2\xi - \operatorname{Cos} 2\eta)\, \psi_2 = 0 \quad \ldots\ldots \quad (16),$$

where $\alpha^2 c^2 = \frac{n\,\varrho}{\mu} c^2$. $c^2 n$ being of the dimension (velocity $\times$ length), $\alpha^2 c^2$ is a dimensionless quantity like Reynold's number.

As a solution of (15) we take

$$\psi_1 = B\, e^{-\xi} \operatorname{Sin} \eta \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

where B is some constant.

To find a suitable solution of (16) let us put $\psi_2 = U(\xi)\, V(\eta)$, where $U(\xi)$ is a function of ξ, and $V(\eta)$ is a function of η only. Then the equation can be broken up into

$$\frac{d^2 U}{d \xi^2} - \left(a + \frac{1}{2}\, i\, \alpha^2 c^2 \operatorname{Cosh} 2\xi\right) U = 0 \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

and

$$\frac{d^2 V}{d \eta^2} + \left(a + \frac{1}{2}\, i\, \alpha^2 c^2 \operatorname{Cos} 2\eta\right) V = 0 \quad \ldots\ldots \quad (19),$$

where a is the separation constant.

The possible forms of V are the Mathieu functions ce_0, ce_1, ce_2, ..., se_1, se_2 .... corresponding to values a_0, a_1, a_2 ...., b_1, b_2 .... of a respectively[2]), these values being expressible in terms of the other constant in the equation. An equation of the form (18) has been studied by J. Dougall[3]), who considered the equation

$$\frac{d^2 U}{d \xi^2} + \left(\frac{1}{2}\, \alpha^2 c^2 \operatorname{Cosh} 2\xi - s^2\right) U = 0 \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

and found the solution valid for $\xi = \infty$ in the form

$$G(\nu, s, \alpha c, \xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a'_n\, J_n\!\left(\frac{1}{2}\, \alpha c\, e^{-\xi}\right) G_{n+\nu}\!\left(\frac{1}{2}\, \alpha c\, e^{\xi}\right),$$

where

$$G_m(z) = \frac{\pi}{2 \operatorname{Sin} m\pi} \left[J_{-m}(z) - \operatorname{Cos} m\pi\, J_m(z)\right],$$

and ν is determined in terms of s only by a certain equation and the constants a'_n have definite forms.

Now corresponding to ce_0, ce_2, se_2 .... it is found that $\nu = 0$[4]) and that corresponding to ce_1, se_1, ce_3 ...... $\nu = 1$[5]). Also the constants a'_n[3]) have forms given by

$$a'_n = \frac{\Phi\left(n + \frac{1}{2}\nu\right)}{\Phi\left(\frac{1}{2}\nu\right)} \quad \ldots\ldots \quad (20\text{a}),$$

[2]) Whittaker & Watson: Modern Analysis, fourth edition, page 410.
[3]) J. Dougall: Proc. Edin. Math. Soc. XXXIV, 1915—16.
[4]) W. J. Harrison: Trans. Camb. Phil. Soc. XXIII, 4 (1924).
[5]) $\operatorname{Cos} \nu\pi = \operatorname{Cos} s\pi$ + terms containing $\alpha^4 c^4$, $\alpha^8 c^8$ etc., where $s \sim 1$.

where if $\frac{1}{2}s = r$ and $\frac{1}{4}ac = \lambda$, the function $\Phi(z)$ is defined by

$$\Phi(z) = \frac{\lambda^{2z}}{\Pi(z+r)\,\Pi(z-r)}\{1 - \lambda^4 A_z^{(1)} + \lambda^8 A_z^{(2)} \ldots\} \quad \ldots \ldots \quad (20b),$$

where $A_z^{(1)}, A_z^{(2)}$ etc. are functions of z and r.

The solution required in the present case for equation (18) may be obtained from Dougall's solution by writing $\sqrt{-i\,ac}$ in place of ac, and will be denoted by

$$g_\nu(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a'_n I_n\left(\frac{1}{2}\sqrt{-i\,ac}\,e^{-\xi}\right) K_{n+\nu}\left(\frac{1}{2}\sqrt{-i\,ac}\,e^{\xi}\right) \quad \ldots \quad (20c).$$

Accordingly, a complete solution for ψ_2 may be written as

$$\psi_2 = (A_m\,c\,e_m + B_m\,s\,e_m)\,g_m(\xi).$$

For our purpose we take

$$\psi_2 = B_1\,s\,e_1\,g_1(\xi) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21),$$

corresponding to $\nu = 1$.

Now for small values of ac, se_1 is equal to $\operatorname{Sin}\eta$[6]) and to the same order of approximation, $g_1(\xi)$ can be replaced by the single term $I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{-i\,ac}\,e^{-\xi}\right) K_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{-i\,ac}\,e^{\xi}\right)$, in the neighbourhood of the cylinder, the corresponding constant a'_0 in this case being equal to unity. All other terms of the series when calculated contain ac, a^2c^2 etc. whereas the term retained, namely that corresponding to $n = 0$ contains a term of order $\frac{1}{ac}$. This justifies the neglect of all terms in $g_1(\xi)$ except the one for $n = 0$. An approximate solution of (4) is thus obtained by putting

$$\psi = \{A\,g_1(\xi) + B\,e^{-\xi}\}\operatorname{Sin}\eta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (22).$$

5. Determinations of the constants. Taking the elliptic section to be given by $\xi = \xi_0$, the boundary conditions reduce to (omitting the exponential factors)

$$\text{on} \quad \xi = \xi_0, \qquad u = u_0, \qquad v = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23).$$

Now

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial\psi}{\partial y} = -\left[\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right] \\ &= -h^2 c\,[\operatorname{Cosh}\xi\operatorname{Sin}^2\eta\,\{A\,g'_1(\xi) - B\,e^{-\xi}\} + \operatorname{Sinh}\xi\operatorname{Cos}^2\eta\,\{A\,g_1(\xi) + B\,e^{-\xi}\}] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (24),$$

and

$$v = \frac{\partial\psi}{\partial x} = h^2 c\operatorname{Sin}\eta\operatorname{Cos}\eta\,[\operatorname{Sinh}\xi\,\{A\,g'_1(\xi) - B\,e^{-\xi}\} - \operatorname{Cosh}\xi\,\{A\,g_1(\xi) + B\,e^{-\xi}\}] \quad \ldots \quad (25),$$

where

$$h^2 = \frac{1}{c^2(\operatorname{Sinh}^2\xi + \operatorname{Sin}^2\eta)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (26),$$

and dashes denote differentiations with regard to ξ.

The conditions (23) give

$$\operatorname{Sinh}\xi_0\,\{A\,g'_1(\xi_0) - B\,e^{-\xi_0}\} = \operatorname{Cosh}\xi_0\,\{A\,g_1(\xi_0) + B\,e^{-\xi_0}\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (27)$$

[6]) Whittaker & Watson, Modern Analysis, fourth edition, p. 411:

$$s\,e_1 = \operatorname{Sin}\eta + \sum_{r=1}^{\infty}\left\{\frac{2^r \cdot q^r}{r!\,(r+1)!} + \frac{2^{r+1}\,r\,q^{r+1}}{(r+1)!\,(r+1)!} + \frac{2^r\,q^{r+2}}{(r-1)!\,(r+2)!} + O(q^{r+3})\right\}\operatorname{Sin}(2r+1)\,\eta, \qquad \text{where } q = \frac{1}{32}\,i\,a^2c^2.$$

and

$$u_0\, c\,(\operatorname{Sinh}^2 \xi_0 + \operatorname{Sin}^2 \eta) = -\left[\operatorname{Cosh} \xi_0 \operatorname{Sin}^2 \eta \,\{A\, g'_1(\xi_0) - B\, e^{-\xi_0}\} + \operatorname{Sinh} \xi_0 \operatorname{Cos}^2 \eta \,\{A\, g_1(\xi_0) + B\, e^{-\xi_0}\}\right] \quad \ldots \ldots \quad (28).$$

Since (28) is true for all values of η, we get equating the constant terms and coefficients of $\operatorname{Sin}^2 \eta$,

$$u_0\, c \operatorname{Sinh} \xi_0 = -\{A\, g_1(\xi_0) + B\, e^{-\xi_0}\} \quad \ldots \ldots \quad (29),$$

and

$$u_0\, c = -\left[\operatorname{Cosh} \xi_0 \{A\, g'_1(\xi_0) - B\, e^{-\xi_0}\} - \operatorname{Sinh} \xi_0 \{A\, g_1(\xi_0) + B\, e^{-\xi_0}\}\right] \quad \ldots \quad (30).$$

Now equation (30) with the help of (27) gives back equation (29). Thus the boundary conditions give only two independent relations

$$A\, g_1(\xi_0) + B\, e^{-\xi_0} = -u_0\, c \operatorname{Sinh} \xi_0, \quad \text{and} \quad A\, g'_1(\xi_0) - B\, e^{-\xi_0} = -u_0\, c \operatorname{Cosh} \xi_0 \quad \ldots \quad (31).$$

Solving we get

$$A = -\frac{u_0\, c\, e^{\xi_0}}{g_1(\xi_0) + g'_1(\xi_0)} \quad \text{and} \quad B = \frac{u_0\, c\, e^{\xi_0}}{g_1(\xi_0) + g'_1(\xi_0)} \{\operatorname{Cosh} \xi_0\, g_1(\xi_0) - \operatorname{Sinh} \xi_0\, g'_1(\xi_0)\} \quad \ldots \quad (32).$$

6. Determination of pressure. Now to find the pressure p, we have from the equations (1) and (3)

$$-\varrho \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} - \mu \nabla_1^2 \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \varrho \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla_1^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \ldots \ldots \quad (33).$$

These equations taken along with (5) and (6) reduce to

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \varrho \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y\, \partial t}, \quad \text{and} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\varrho \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x\, \partial t} \quad \ldots \ldots \quad (34).$$

Since both ψ_1 and p vary as $e^{i n t}$ we get, omitting the exponential factor

$$\frac{\partial p}{\partial x} = i\, n\, \varrho \frac{\partial \psi_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -i\, n\, \varrho \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \quad \ldots \ldots \quad (35),$$

where

$$\psi_1 = B\, e^{-\xi} \operatorname{Sin} \eta \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

as already taken.

Since however $\nabla_1^2\, p = 0$, we may assume for p the form

$$p = C\, e^{-\xi} \operatorname{Cos} \eta \quad \ldots \ldots \quad (36),$$

where C is some constant.

The substitutions of (17) and (36) in (35) give at once,

$$C = -i\, n\, \varrho\, B$$

so that

$$p = -i\, n\, \varrho\, B\, e^{-\xi} \operatorname{Cos} \eta = -i\, \mu\, \alpha^2 B\, e^{-\xi} \operatorname{Cos} \eta \quad \ldots \ldots \quad (37).$$

7. Calculation of Resistance. The total force exerted by the liquid per unit length of the cylinder is given by

$$W = \int \left[\left(-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) l + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) m\right] d\, s \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

taken round the transverse section, (l, m) being the direction-cosines of the outward normal.

Thus

$$W = \int_0^{2\pi} \left[\left(-p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \operatorname{Sinh} \xi_0 \operatorname{Cos} \eta + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \operatorname{Cosh} \xi_0 \operatorname{Sin} \eta \right] c\, d\eta \quad . \quad (39).$$

Now

$$\int_0^{2\pi} -p \operatorname{Sinh} \xi_0 \operatorname{Cos} \eta\, c\, d\eta = i \mu a^2 c B e^{-\xi_0} \operatorname{Sinh} \xi_0 \pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40),$$

substituting the values of p from (37).

Again from equations (24) and (26) we get

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = -h^2 \Bigg[& \operatorname{Sinh} \xi \operatorname{Cos} \eta \left\{ \frac{\operatorname{Sinh} \xi \operatorname{Sin}^2 \eta \, (A g'_1(\xi) - B e^{-\xi})}{\operatorname{Sinh}^2 \xi + \operatorname{Sin}^2 \eta} + \frac{\operatorname{Cosh} \xi \operatorname{Sin}^2 \eta \, (A g''_1(\xi) + B e^{-\xi})}{\operatorname{Sinh}^2 \xi + \operatorname{Sin}^2 \eta} \right. \\ & - \frac{2 \operatorname{Cosh}^2 \xi \operatorname{Sinh} \xi \operatorname{Sin}^2 \eta \, (A g'_1(\xi) - B e^{-\xi})}{(\operatorname{Sinh}^2 \xi + \operatorname{Sin}^2 \eta)^2} + \frac{\operatorname{Cosh} \xi \operatorname{Cos}^2 \eta \, (A g_1(\xi) + B e^{-\xi})}{\operatorname{Sinh}^2 \xi + \operatorname{Sin}^2 \eta} \\ & \left. + \frac{\operatorname{Sinh} \xi \operatorname{Cos}^2 \eta \, (A g'_1(\xi) - B e^{-\xi})}{\operatorname{Sinh}^2 \xi + \operatorname{Sin}^2 \eta} - \frac{2 \operatorname{Sinh}^2 \xi \operatorname{Cosh} \xi \operatorname{Cos}^2 \eta \, (A g_1(\xi) + B e^{-\xi})}{(\operatorname{Sinh}^2 \xi + \operatorname{Sin}^2 \eta)^2} \right\} \\ & - \operatorname{Cosh} \xi \operatorname{Sin} \eta \left\{ \frac{2 \operatorname{Cosh} \xi \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Cos} \eta \, (A g'_1(\xi) - B e^{-\xi})}{\operatorname{Sinh}^2 \xi + \operatorname{Sin}^2 \eta} - \frac{2 \operatorname{Cosh} \xi \operatorname{Sin}^3 \eta \operatorname{Cos} \eta \, (A g_1(\xi) - B e^{-\xi})}{(\operatorname{Sinh}^2 \xi + \operatorname{Sin}^2 \eta)^2} \right. \\ & \left. - \frac{2 \operatorname{Sinh} \xi \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Cos} \eta \, (A g_1(\xi) + B e^{-\xi})}{\operatorname{Sinh}^2 \xi + \operatorname{Sin}^2 \eta} - \frac{2 \operatorname{Sinh} \xi \operatorname{Cos}^3 \eta \operatorname{Sin} \eta \, (A g_1(\xi) + B e^{-\xi})}{(\operatorname{Sinh}^2 \xi + \operatorname{Sin}^2 \eta)^2} \right\} \Bigg] \end{aligned} \quad (41).$$

But, $g_1(\xi)$ satisfies the differential equation (18) so that

$$g''_1(\xi) = \left(a + \frac{1}{2} i a^2 c^2 \operatorname{Cosh} 2\xi \right) g_1(\xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42).$$

Since the separation constant a is determined by the corresponding solution of (19), which in our case is taken to be *se*, we get[7])

$$a = 1 + \frac{1}{4} i a^2 c^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

neglecting the higher order terms.

Thus with the help of equations (42) and (43) and the relation (31), equation (41) gives on the boundary $\xi = \xi_0$,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\xi = \xi_0} = -\frac{1}{2} i a^2 A \frac{\left(\frac{1}{2} + \operatorname{Cosh} 2\xi_0 \right) \operatorname{Sinh} \xi_0 \operatorname{Cosh} \xi_0 \operatorname{Sin}^2 \eta \operatorname{Cos} \eta \, g_1(\xi_0)}{(\operatorname{Sinh}^2 \xi_0 + \operatorname{Sin}^2 \eta)^2} \quad . \quad . \quad (44).$$

Similarly we have further on $\xi = \xi_0$,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{\xi = \xi_0} = -\frac{1}{2} i a^2 A \frac{\left(\frac{1}{2} + \operatorname{Cosh} 2\xi_0 \right) \operatorname{Cosh}^2 \xi_0 \sin^3 \eta \, g_1(\xi_0)}{(\operatorname{Sinh}^2 \xi_0 + \operatorname{Sin}^2 \eta)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

and

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{\xi = \xi_0} = \frac{1}{2} i a^2 A \frac{\left(\frac{1}{2} + \operatorname{Cosh} 2\xi_0 \right) \operatorname{Sinh}^2 \xi_0 \operatorname{Sin} \eta \operatorname{Cos}^2 \eta \, g_1(\xi_0)}{(\operatorname{Sinh}^2 \xi_0 + \operatorname{Sin}^2 \eta)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46).$$

The integral on the left of (39) can now be evaluated by substitutions from (44), (45) and (46) and we get finally

$$W = i \pi \mu a^2 c e^{-\xi_0} \left\{ B \operatorname{Sinh} \xi_0 - A g_1(\xi_0) \left(\frac{1}{2} + \operatorname{Cosh} 2\xi_0 \right) \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (47).$$

[7]) Whittaker & Watson: Modern Analysis, fourth edition, page 411.

These results have got to be simplified with consideration of the fact that $a c$ is small. Now

$$g_1(\xi_0) = I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{-i}\, a c\, e^{-\xi_0}\right) K_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{-i}\, a c\, e^{\xi_0}\right) \quad \ldots \quad (48),$$

i. e.,

$$g_1(\xi_0) = -I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{-i}\, a c\, e^{-\xi_0}\right) K'_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{-i}\, a c\, e^{\xi}\right) \quad \ldots \quad (49),$$

where the dash in K'_0 denotes differentiation with respect to $\frac{1}{2} a c\, e^{\xi_0}$ and $I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{-i}\, a c\, e^{-\xi_0}\right)$, $K_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{-i}\, a c\, e^{\xi_0}\right)$, using notations of Lord Kelvin[8]), are given by

$$I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{-i}\, a c\, e^{-\xi_0}\right) = \operatorname{ber}\left(\frac{1}{2} a c\, e^{-\xi_0}\right) - i \operatorname{bei}\left(\frac{1}{2} a c\, e^{-\xi_0}\right) \quad \ldots \quad (50)$$

and

$$K_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{-i}\, a c\, e^{\xi_0}\right) = \operatorname{ker}\left(\frac{1}{2} a c\, e^{\xi_0}\right) - i \operatorname{kei}\left(\frac{1}{2} a c\, e^{\xi_0}\right) \quad \ldots \quad (51).$$

Now using the values of these functions for small values of $a c$, we get

$$g_1(\xi_0) = -\left[-\frac{2}{a c\, e^{\xi_0}} + \frac{\pi\, a c\, e^{\xi_0}}{16} + i\left\{\frac{a c\, e^{\xi_0}}{4} \log\left(\frac{1}{4}\gamma\, a c\, e^{\xi_0}\right) - \frac{a c\, e^{\xi_0}}{8}\right\}\right] \quad \ldots \quad (52).$$

To find $g'_1(\xi_0)$ we first find out

$$K'_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{-i}\, a c\, e^{\xi_0}\right) \text{ i. e., } \quad -K''_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{-i}\, a c\, e^{\xi_0}\right),$$

dashes denoting differentiations with respect to $\frac{1}{2} a c\, e^{\xi_0}$.

From the differential equation satisfied by K_0 we have

$$K''_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{-i}\, a c\, e^{\xi_0}\right) = -\left[\frac{2}{a c\, e^{\xi_0}} K'_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{-i}\, a c\, e^{\xi_0}\right) - i\, K_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{-i}\, a c\, e^{\xi_0}\right)\right] \quad . \quad (53).$$

Also

$$\left.\begin{aligned} g'_1(\xi_0) = {} & \frac{1}{2} a c\, e^{-\xi_0} I'_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{-i}\, a c\, e^{-\xi_0}\right) K'_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{-i}\, a c\, e^{\xi_0}\right) \\ & -\frac{1}{2} a c\, e^{\xi_0} I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{-i}\, a c\, e^{-\xi_0}\right) K''_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{-i}\, a c\, e^{\xi_0}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (54)$$

and when $a c$ is very small

$$\left.\begin{aligned} g'_1(\xi_0) = {} & -\frac{i\, a^2 c^2 e^{-2\xi_0}}{8}\left\{-\frac{2}{a c\, e^{\xi_0}} + \frac{\pi\, a c\, e^{\xi_0}}{16} + i\left(\frac{a c\, e^{\xi_0}}{4}\log\left(\frac{1}{4}\gamma\, a c\, e^{\xi_0}\right) - \frac{a c\, e^{\xi_0}}{8}\right)\right\} \\ & + \frac{1}{2} a c\, e^{\xi_0}\left[\frac{2}{a c\, e^{\xi_0}}\left\{-\frac{2}{a c\, e^{\xi_0}} + \frac{\pi\, a c\, e^{\xi_0}}{16} + i\left(\frac{a c\, e^{\xi_0}}{4}\log\left(\frac{1}{4}\gamma\, a c\, e^{\xi_0}\right) - \frac{a c\, e^{\xi_0}}{8}\right)\right\}\right. \\ & \left. - i\left\{-\log\left(\frac{1}{4}\gamma\, a c\, e^{\xi_0}\right) + i\frac{\pi}{4}\right\}\right] \end{aligned}\right\} \quad . \quad (55).$$

Hence from (52) and (55) we get for small values of $a c$,

$$g_1(\xi_0) + g_1'(\xi_0) = \frac{i\, a c\, e^{\xi_0}}{2}\left\{\log\left(\frac{1}{4}\gamma\, a c\, e^{\xi_0}\right) - i\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} e^{-4\xi_0}\right\} \quad \ldots \quad (56).$$

[8]) Watson; Theory of Bessel Functions, 1922, page 81.

The constants A and B in (32) can now be calculated up to small order terms and subsequent substitution in (47) gives

$$\left.\begin{aligned} W &= i\,\mu\,\pi\,a^2\,c^2\,u_0\,\frac{\operatorname{Cosh}\xi_0\operatorname{Sinh}\xi_0\,g_1(\xi_0)-\operatorname{Sinh}^2\xi_0\,g'_1+g_1\operatorname{Cosh}^2\xi_0+g_1\operatorname{Sinh}^2\xi_0+\frac{1}{2}\,g_1}{g_1+g'_1} \\ &= 4\,\pi\,\mu\,u_0\,\frac{1-e^{-3\xi_0}\operatorname{Sinh}\xi_0+\frac{1}{2}\,e^{-2\xi_0}}{\log\left(\frac{1}{4}\,\gamma\,a\,c\,e^{\xi_0}\right)+\frac{1}{2}\,e^{-4\xi_0}-i\,\frac{\pi}{4}} \end{aligned}\right\} \quad (57)$$

after calculation.

Finally bringing in the factor $e^{i\,n\,t}$, we get for the total force experienced by the unit length of the cylinder given by

$$W = 4\,\pi\,\mu\,u_0\,\frac{1-e^{-3\xi_0}\operatorname{Sinh}\xi_0+\frac{1}{2}\,e^{-2\xi_0}}{\log\left(\frac{1}{4}\,\gamma\,a\,c\,e^{\xi_0}\right)+\frac{1}{2}\,e^{-4\xi_0}-i\,\frac{\pi}{4}}\,e^{i\,n\,t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (58).$$

Calculating in terms of real functions, if the pulsation of the cylinder be given by $u = u_0 \operatorname{Cos} n\,t$, the total force on the unit length of the cylinder is

$$W = 4\,\pi\,\mu\,u_0\,\frac{\left(1-e^{-3\xi_0}\operatorname{Sinh}\xi_0+\frac{1}{2}\,e^{-2\xi_0}\right)\left[\left\{\log\left(\frac{1}{4}\,\gamma\,a\,c\,e^{\xi_0}\right)+\frac{1}{2}\,e^{-4\xi_0}\right\}\operatorname{Cos} n\,t-\frac{\pi}{4}\operatorname{Sin} n\,t\right]}{\left\{\log\left(\frac{1}{4}\,\gamma\,a\,c\,e^{\xi_0}\right)+\frac{1}{2}\,e^{-4\xi_0}\right\}^2+\frac{\pi^2}{16}} \quad (59).$$

Now if a and b be the semiaxes of the ellipse, we have

$$e^{-2\xi_0} = \frac{a-b}{a+b}, \qquad e^{-4\xi_0} = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2, \qquad e^{-\xi_0}\operatorname{Sinh}\xi_0 = \frac{b}{a+b},$$

hence

$$W = 4\,\pi\,u\,u_0\,\frac{\left\{1-\frac{(a-b)\,b}{(a+b)^2}+\frac{1}{2}\,\frac{a-b}{a+b}\right\}\left[\left\{\log\left(\frac{1}{4}\,\gamma\,a\,\overline{a+b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right\}\operatorname{Cos} n\,t-\frac{\pi}{4}\operatorname{Sin} n\,t\right]}{\left\{\log\left(\frac{1}{4}\,\gamma\,a\,\overline{a+b}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right\}^2+\frac{\pi^2}{16}} \quad (60).$$

This force is exerted by the liquid to maintain the vibration of the cylinder.

If in (60) we put $a = b$ we pass on to the case of a circular cylinder and get

$$W = 4\,\pi\,\mu\,u_0\,\frac{\log\left(\frac{1}{2}\,\gamma\,a\,a\right)\operatorname{Cos} n\,t-\frac{\pi}{4}\operatorname{Sin} n\,t}{\left\{\log\left(\frac{1}{2}\,\gamma\,a\,a\right)\right\}^2+\frac{\pi^2}{16}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (61),$$

which agrees with the result found in my previous paper in a different manner.

Again the maximum value of the total force is

$$(W)_{\max} = \frac{4\,\pi\,\mu\,u_0\left\{1-\frac{(a-b)\,b}{(a+b)^2}+\frac{1}{2}\,\frac{a-b}{a+b}\right\}}{\left[\left\{\log\left(\frac{1}{4}\,\gamma\,a\,\overline{a+b}+\frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right\}^2+\frac{\pi^2}{16}\right]^{\frac{1}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (62).$$

Putting $\frac{b}{a} = \varepsilon$ in (60) we get

$$W = 4\pi\mu u_0 \frac{\left\{1 - \frac{(1-\varepsilon)\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2} + \frac{1}{2}\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right\}\left[\left\{\log\left(\frac{1}{4}\gamma\, a\, \alpha(1+\varepsilon)\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2\right\}\operatorname{Cos} n t - \frac{\pi}{4}\operatorname{Sin} n t\right]}{\left\{\log\left(\frac{1}{4}\gamma\, a\, \alpha\,\overline{1+\varepsilon}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2\right\}^2 + \frac{\pi^2}{16}} \tag{63}$$

and writing this in form

$$W = -A\mu u_0 [B \operatorname{Cos} n t + C \operatorname{Sin} n t), \quad \text{where } C = \cdot 785 \quad . \; . \; . \tag{64}$$

and taking different values of $a\alpha$, all very small, the corresponding values of A, B and those of $\left(\frac{W}{\mu u_0}\right)_{\max}$ are tabulated in the annexed table (1).

Table I.

$\varepsilon = \frac{b}{a}$	$a\alpha = \cdot 1$			$a\alpha = \cdot 05$			$a\alpha = \cdot 01$		
	A	B	$\left(\frac{W}{\mu u_0}\right)_{\max}$	A	B	$\left(\frac{W}{\mu u_0}\right)_{\max}$	A	B	$\left(\frac{W}{\mu u_0}\right)_{\max}$
1	1·943	2·419	4·94	1·22	3·112	3·91	·548	4·721	2·62
·9	1·94	2·421	4·93	1·22	3·114	3·9	·54	4·723	2·62
·8	1·817	2·518	4·81	1·15	3·211	3·82	·49	4·82	2·59
·7	1·77	2·565	4·76	1·13	2·258	3·81	·52	4·867	2·59
·6	1·74	2·611	4·75	1·12	3·304	3·82	·523	4·913	2·61
·5	1·73	2·652	4·76	1·12	3·345	3·86	·524	4·95	2·64
·2	1·93	2·708	5·44	1·26	3·4	4·41	·59	5·	3·03
0	2·53	2·612	6·9	1·64	3·305	5·56	·76	4·914	3·82

The case $\varepsilon = \frac{b}{a} = 1$ corresponds to that of a circular cylinder vibrating along its diameter.

In the annexed diagram, the values of $\left(\frac{W}{\mu u_0}\right)_{\max}$ are plotted against $\varepsilon = \frac{b}{a}$ for different values $a\alpha$.

From the tables and the curves it is apparent that the maximum force on a vibrating circular cylinder is greater than that on a nearly circular and similarly vibrating elliptic cylinder with the major axis of its section equal to the diameter of the circle. As b decreases and the ellipse becomes flatter the total force also decreases. Though the tables are calculated up to $\varepsilon = 0$ (flat plate) this last value is certainly wrong as the approximate boundary conditions (2) clearly fail in this case. Some of the figures just above $\varepsilon = 0$ are also, for the same reason, not trustworthy. The tables show a minimum value for the maximum force $\left(\frac{W}{\mu u_0}\right)$. A good deal of doubt also attaches to this minimum as it may also be due to the failure of the boundary condition mentioned above. But on the other hand it may be argued that these conditions can be made more reliable by decreasing u_0 the amplitude of the vibration, suitably. Since $a\alpha$ does not directly involve u_0 it appears that a minimum for $\left(\frac{W}{\mu u_0}\right)_{\max}$ exists for sufficiently small u_0. In any case, cases close to $\varepsilon = 0$ do not lend themselves to satisfactory treatment by the present method.

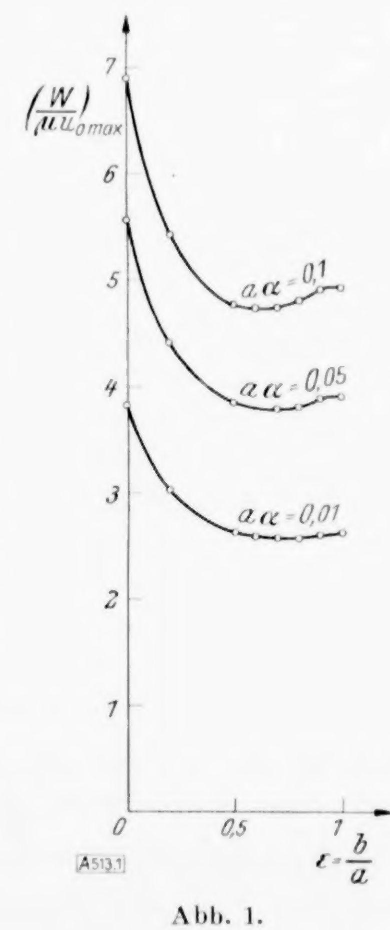


Abb. 1.

We can also calculate the work done by liquid pressure in one complete vibration.

This is given by

$$P = \int_0^{2\pi/n} W\, u\, dt = \frac{4\pi^2 \mu u_0^2 \left\{1 - \frac{(a-b)^2}{2(a+b)^2}\right\} \left\{\log\left(\frac{1}{4}\gamma\, a\, \overline{a+b}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right\}}{n\left[\left\{\log\left(\frac{1}{4}\gamma\, a\, \overline{a+b}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right\}^2 + \frac{\pi^2}{16}\right]} \quad . \; . \quad (65).$$

It may be further added that as regards the function P in equation (65), (which gives the work done by pressure in maintaining the vibration), $\left(\frac{P n}{\mu u_0^2}\right)$ behaves in the same manner as $\left(\frac{W}{\mu u_0}\right)$ in the adjoining tables.

8. We further give below the results for the vibration of the elliptic cylinder in the direction of the minor axis.

In this case we assume

$$\psi_1 = B e^{-\xi} \operatorname{Cos} \eta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17{\cdot}1),$$

$$\psi_2 = B_1\, c\, e_1\, g_1(\xi) = B_1\, g_1(\xi) \operatorname{Cos} \eta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21{\cdot}1),$$

where $g_1(\xi)$ satisfies the equation

$$g''_1(\xi) = \left(1 - \frac{1}{4} i\, \alpha^2 c^2 + \frac{1}{2} i\, \alpha^2 c^2 \operatorname{Cosh} 2\xi\right) g_1(\xi) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (42{\cdot}1),$$

the constant of separation a being $1 - \frac{1}{4} i\, \alpha^2 c^2$.

Thus we get

$$\psi = \{A\, g_1(\xi) + B e^{-\xi}\} \operatorname{Cos} \eta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22{\cdot}1).$$

The pressure as before is given by

$$p = i\, n\, \varrho\, B e^{-\xi} \operatorname{Sin} \eta \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37{\cdot}1).$$

The boundary conditions, omitting the exponential term are

$$u = 0\,, \qquad v = v_0 \quad \text{on} \quad \xi = \xi_0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23{\cdot}1).$$

From these conditions we can easily find

$$A = \frac{v_0\, c\, e^{\xi_0}}{g_1(\xi_0) + g'_1(\xi_0)}\,, \qquad B = \frac{v_0\, c\, e^{\xi_0}}{g_1 + g'_1} \{\operatorname{Cosh} \xi_0\, g'_1 - \operatorname{Sinh} \xi_0\, g_1\} \quad . \; . \; . \; . \quad (32{\cdot}1).$$

Calculating out $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ and $\frac{\partial v}{\partial y}$ on the boundary $\xi = \xi_0$ we can find for the total force experienced by the unit length of the cylinder, as

$$W = \int_0^{2\pi} \left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \operatorname{Sinh} \xi_0 \operatorname{Cos} \eta + \left(-p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) \operatorname{Cosh} \xi_0 \operatorname{Sin} \eta\right] c\, d\eta \quad . \; . \; . \quad (38{\cdot}1),$$

and for very small value of αc, we get, corresponding to the vibration $v_0 \operatorname{Sin} n t$ of the cylinder along the minor axis,

$$W = 4\pi\mu v_0 \frac{\left\{1 + \frac{(a-b)\,a}{(a+b)^2} - \frac{1}{2}\frac{a-b}{a+b}\right\} \left[\left\{\log\left(\frac{1}{4}\gamma\, \alpha\, \overline{a+b}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right\} \operatorname{Sin} n t + \frac{\pi}{4} \operatorname{Cos} n t\right]}{\left\{\log\left(\frac{1}{4}\gamma\, \alpha\, \overline{a+b}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right\}^2 + \frac{\pi^2}{16}} \quad (60{\cdot}1).$$

Putting $a = b$, we get the value of W for a circular cylinder and this value quite agrees with the result found before.

In conclusion, I want to express my gratefulness to Prof. N. R. Sen for his unsparing help and guidance throughout this work.

Schwingungen elastischer Seile.

Von *Rudolf Höger* VDI in Brünn.

1. Den Gegenstand der folgenden Untersuchung bilden die Eigenschwingungen eines elastischen Seiles, welches zwischen zwei gleichhoch liegenden festen Punkten aufgehängt ist, und die infolge der Schwingungen auftretenden dynamischen Zusatzspannungen. Die bisher über diesen Gegenstand vorliegenden Arbeiten beschränken sich einerseits meist auf die angenäherte Ermittlung der Eigenfrequenzen, andererseits liegen ihnen gewisse vereinfachende Annahmen zugrunde, welche für die Bestimmung von Eigenfrequenz und Eigenschwingungsform wohl zulässig sind, während sie bei der Berechnung der auftretenden zusätzlichen Spannungen zu ungenauen Ergebnissen führen dürften. So werden i. A. nur Schwingungen in vertikaler Richtung berücksichtigt, während die Horizontalschwingungen vernachlässigt werden[1]). Einer Reihe anderer Arbeiten[2]) liegt außerdem die Annahme einer durch die Schwingung nicht beeinflußten konstanten Seilspannung zugrunde. Diese Annahme dürfte jedoch nur im verwandten Falle der stark gespannten Saite am Platze sein und nicht hier, wo es sich um ein durchhängendes Seil handelt. Die bereits von G. Kirchhoff[3]) hergeleiteten Gleichungen für die Längs- und Querschwingungen einer schwach gespannten Saite

$$\frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = EF\left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right] \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

$$\frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = S_0\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + EF\left[\frac{3}{2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right] \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

(ξ = Verschiebung eines Saitenpunktes in Richtung der Saite,

η = Verschiebung eines Saitenpunktes senkrecht dazu,

S_0 = statische Vorspannung der Saite,

E = Elastizitätsmaß,

F = Querschnittsfläche,

γ = Gewicht der Längeneinheit)

zeigen einerseits, daß die Längs- und Querschwingungen nicht unabhängig voneinander erfolgen, andererseits, daß in der Gl. (2) für die Querschwingungen zu dem von der Vorspannung S_0 herrührenden Gliede noch ein vom Elastizitätsmaß abhängiger Ausdruck hinzutritt, welcher erst bei entsprechend großer Vorspannung vernachlässigt werden darf. Die Möglichkeit der Aufprägung einer beliebig großen statischen Vorspannung besteht nun nicht, sobald es sich um ein frei durchhängendes Seil handelt; in diesem Falle wird man daher bei der Aufstellung der Gleichungen die durch die Schwingung verursachte Spannungsänderung berücksichtigen müssen.

Im folgenden sollen nun keinerlei besondere Voraussetzungen über Schwingungsform und Spannungsverlauf gemacht werden.

2. Der folgenden Betrachtung möge ein elastisches Seil von der Spannweite $2W$ und dem Durchhange h zugrunde gelegt werden. Die Querschnittsfläche des Seiles sei F, sein Elastizitätsmaß E. Die Untersuchung möge sich zunächst auf Seile mit verhältnismäßig kleinem Durchhang h erstrecken.

Zur Vereinfachung der Rechnung soll im weiteren die gemeine Kettenlinie, welche die Form des gleichbelasteten Seiles im Ruhezustand wiedergibt, durch einen Kreisbogen ersetzt werden. In vielen Arbeiten, welche sich mit Seilschwingungen befassen, wird die gemeine Kettenlinie durch eine Parabel ersetzt, doch empfiehlt sich bei der folgenden Verwendung von Polarkoordinaten der Ersatz durch einen Kreisbogen. Wählt man z. B. $W = 100$ m und $h = 5$ m, so beträgt der Krümmungsradius

$$\varrho = a\,\mathfrak{Cof}^2\frac{x}{a} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

$\left(\text{mit } a = \frac{S_0}{\gamma}\right)$ in der Mitte des Seiles 1000 m, in den Aufhängungspunkten 1010 m. Der Fehler bewegt sich somit in der Größenordnung von 1 %.

[1]) Vgl. z. B.: K. Wolf: Schwingungen elastischer Seile. ZAMM Bd. 7 (1927), S. 137.

[2]) Vgl. z. B.: W. Meyer zur Capellen: Methode zur angenäherten Lösung von Eigenwertproblemen mit Anwendungen auf Schwingungsprobleme. Ann. d. Phys., V. Folge, Bd. 8 (1931), S. 297.

[3]) G. Kirchhoff: Vorlesungen über Mechanik, IV. Aufl., Leipzig 1897. (29. Vorlesg.)

Um jedoch zu vermeiden, daß durch diese Annahme eine Fehlerquelle geschaffen wird, soll im weiteren die Eigengewichtsbelastung γ des Seiles nicht als konstant, sondern als längs des Seiles derart veränderlich angenommen werden, daß als Gleichgewichtsform gerade ein Kreisbogen resultiert. Man findet, daß γ dann durch die Beziehung

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{\cos^2 \varphi}$$

gegeben ist, wenn φ den Neigungswinkel der Seiltangente gegen die Horizontale und γ_0 den Wert von γ in der Seilmitte bezeichnen. Erst in den Ergebnissen soll dann im Hinblick auf den geringen Einfluß der Veränderlichkeit von γ dieses als konstant angenommen werden.

Die Aufstellung der Differentialgleichungen für das Eigenwertproblem möge unter Benutzung des Hamiltonschen Prinzips erfolgen. Variiert man die im Verlaufe der Schwingung wirklich eintretenden Verschiebungen derart, daß die Variationen zu zwei beliebigen Zeitpunkten τ_0 und τ_1 verschwinden und außerdem die Randbedingungen stets erfüllt sind, d. h. die Verschiebungen in den Seilaufhängungspunkten stets verschwinden, so gilt

$$\delta \int_{\tau_0}^{\tau_1} (\Pi - T)\, d\tau = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Hierin ist Π die gesamte potentielle Energie, die sich aus der Formänderungsarbeit und der potentiellen Energie der Schwerkraft zusammensetzt, während T die kinetische Energie des schwingenden Systems bezeichnet. Diese Energiegrößen sind daher zunächst durch die Verschiebungen auszudrücken.

3. Die bei einer Deformation des Seiles aufzuwendende Formänderungsarbeit A ist infolge Vernachlässigung der Seilsteifigkeit allein gegeben durch die Größe der Längsdehnung ε. Diese setzt sich zusammen aus einer bereits im Ruhezustande vorhandenen statischen Dehnung ε_0 und einer infolge der Schwingung hinzutretenden dynamischen Dehnung ε_1. Da die Seilkraft S_0, welche für die statische Dehnung maßgebend ist, nur wenig von dem Horizontalzug H abweicht, kann ε_0 längs des Seiles als konstant angenommen werden, und somit ist

$$\varepsilon_0 = \frac{H}{E \cdot F} = \frac{\gamma_0 \cdot \varrho}{E \cdot F} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

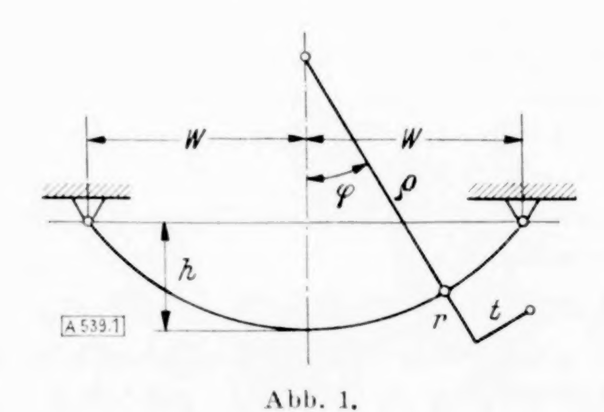


Abb. 1.

Die dynamische Dehnung ergibt sich an Hand von Abb. 1. Ein Punkt (ϱ, φ) des Seiles erleide in radialer Richtung eine Verschiebung r, in tangentialer Richtung eine Verschiebung t. Bezeichnet man die partiellen Ableitungen nach φ durch Striche, so erhält man für das Quadrat der Länge eines Seilelements nach der Verschiebung

$$\left.\begin{aligned} d s^2 &= [r'^2 + (\varrho + r)^2 + t^2 + t'^2 - 2 r' t + 2 t' (\varrho + r)]\, d\varphi^2 \\ &= \varrho^2 \left[1 + \frac{2r}{\varrho}\left(1 + \frac{t'}{\varrho} + \frac{r}{2\varrho}\right) + \frac{2t'}{\varrho}\left(1 + \frac{t'}{2\varrho}\right) + \frac{(r' - t)^2}{\varrho^2}\right] d\varphi^2 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

Infolge der Kleinheit der Verschiebungen bzw. deren Ableitungen gegenüber dem Krümmungsradius ϱ kann man nun auch genügend genau schreiben:

$$d s^2 = \varrho^2 \left[1 + \frac{2(r + t')}{\varrho} + \frac{(r' - t)^2}{\varrho^2}\right] d\varphi^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6a).$$

Die dynamische Dehnung ist nun

$$\varepsilon_1 = \frac{d s - \varrho\, d \varphi}{\varrho\, d \varphi} \quad \text{(7)}$$

und weiter

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\varrho}\left[(r + t') + \frac{1}{2\varrho}(r' - t)^2\right] \quad \text{(8).}$$

Die Formänderungsarbeit endlich ist gegeben durch

$$A = \frac{1}{2} E F \int_{-\Phi}^{+\Phi} \varepsilon^2 \varrho\, d\varphi \quad \text{(9),}$$

wobei die Grenzen $+\Phi$ und $-\Phi$ durch die Neigung der Seiltangenten (gegen die Horizontale) in den Aufhängungspunkten bestimmt sind. Führt man den Wert aus Gl. (8) ein und berücksichtigt bei der Bildung von ε_1^2 nur das Quadrat des ersten Klammerausdruckes, so folgt

$$A = \frac{1}{2} E F \varrho \int_{-\Phi}^{+\Phi} \left\{\varepsilon_0^2 + \frac{2\varepsilon_0}{\varrho}\left[(r + t') + \frac{1}{2\varrho}(r' - t)^2\right] + \frac{1}{\varrho^2}(r + t')^2\right\} d\varphi \quad \text{(10).}$$

Bezeichnet man weiter die partiellen Ableitungen nach der Zeit durch einen Punkt, so ist die kinetische Energie des Seiles, dessen einzelne Elemente sich mit den aufeinander senkrechten Geschwindigkeiten $\dot r$ und $\dot t$ bewegen, gegeben durch

$$T = \frac{1}{2}\frac{\varrho}{g}\int_{-\Phi}^{+\Phi} \gamma(\dot r^2 + \dot t^2)\, d\varphi \quad \text{(11).}$$

Nimmt man schließlich als Nullpunkt der potentiellen Energie der Schwerkraft jene im Zustande des statischen Gleichgewichtes an, so ist die potentielle Energie im Verlaufe der Schwingung gleich

$$V = -\varrho \int_{-\Phi}^{+\Phi} \gamma\, r \cos\varphi\, d\varphi \quad \text{(12).}$$

Die Bewegungen in tangentialer Richtung sind als klein gegen jene in radialer Richtung zu erwarten, außerdem vollziehen sie sich infolge des geringen Durchhanges angenähert in horizontaler Richtung, so daß die durch sie verursachte Änderung der potentiellen Energie außer acht gelassen werden kann. Da $\cos\varphi$ angenähert gleich 1 gesetzt werden kann, erhält man weiter

$$V = -\varrho \int_{-\Phi}^{+\Phi} \gamma\, r\, d\varphi \quad \text{(13).}$$

4. Um Gl. (4) anwenden zu können, hat man jetzt die Variationen der Energiegrößen zu bilden. Man gewinnt aus den Gl. (10), (11) und (13) die Ausdrücke

$$\delta A = E F \int_{-\Phi}^{+\Phi} \left\{\varepsilon_0\left[\left(\delta r + \frac{\partial\, \delta t}{\partial \varphi}\right) + \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi} - t\right)\left(\frac{\partial\, \delta r}{\partial \varphi} - \delta t\right)\right] + \frac{1}{\varrho}\left(r + \frac{\partial t}{\partial \varphi}\right)\left(\delta r + \frac{\partial\, \delta t}{\partial \varphi}\right)\right\} d\varphi \quad \text{(14),}$$

$$\delta T = \frac{\varrho}{g}\int_{-\Phi}^{+\Phi} \gamma\left(\frac{\partial r}{\partial \tau}\frac{\partial\, \delta r}{\partial \tau} + \frac{\partial t}{\partial \tau}\frac{\partial\, \delta t}{\partial \tau}\right) d\varphi \quad \text{(15),}$$

$$\delta V = -\varrho \int_{-\Phi}^{+\Phi} \gamma\, \delta r\, d\varphi \quad \text{(16).}$$

Der Ausdruck für δA läßt sich durch partielle Integration umformen; man erhält nach Einsetzung der Grenzen (für welche die Variationen voraussetzungsgemäß verschwinden)

$$\delta A = E F \int_{-\Phi}^{+\Phi} \left\{ \varepsilon_0 \left[\delta r + \frac{1}{\varrho} (-r'' \delta r - r' \delta t + t' \delta r + t \delta t) \right] + \frac{1}{\varrho} [r \delta r + t' \delta r - r' \delta t - t'' \delta t] \right\} d\varphi \quad (17).$$

Ähnlich läßt sich auch der Ausdruck $\int_{\tau_0}^{\tau_1} \delta T d\tau$ umformen, so daß schließlich Gl. (4) die Form annimmt

$$\left. \begin{aligned} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_{-\Phi}^{+\Phi} \Bigg(E F \left\{ \varepsilon_0 \left[\delta r + \frac{1}{\varrho} (-r'' \delta r - r' \delta t + t' \delta r + t \delta t) \right] + \frac{1}{\varrho} [r \delta r + t' \delta r - r' \delta t - t'' \delta t] \right\} \\ + \frac{\gamma}{g} \varrho [\ddot{r} \delta r + \ddot{t} \delta t] - \gamma \varrho \delta r \Bigg) d\varphi \, d\tau = 0 \end{aligned} \right\} \quad (18).$$

Infolge der Willkürlichkeit der Variationen δr und δt ist diese Gleichung nur erfüllbar, wenn die Faktoren von δr und δt für sich verschwinden. Derart gewinnt man die beiden folgenden Gleichungen

$$E F \left\{ \varepsilon_0 \left[1 + \frac{1}{\varrho} (-r'' + t') \right] + \frac{1}{\varrho} [r + t'] \right\} + \frac{\gamma}{g} \varrho \ddot{r} - \gamma \varrho = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (19),$$

$$E F \left\{ \frac{\varepsilon_0}{\varrho} (t - r') - \frac{1}{\varrho} (r' + t'') \right\} + \frac{\gamma}{g} \varrho \ddot{t} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20).$$

Macht man nun den Ansatz

$$r(\varphi, \tau) = \bar{r}(\varphi) \cdot \sin \omega \tau \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21),$$

$$t(\varphi, \tau) = \bar{t}(\varphi) \cdot \sin \omega \tau \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22),$$

worin $\bar{r}$ und $\bar{t}$ lediglich Funktionen des Winkels φ sind, und berücksichtigt Gl. (5), so ergeben sich die Differentialgleichungen des Problems in folgender Form:

$$\varepsilon_0 \frac{E F}{\varrho^2} \bar{r}'' + \left(\frac{\gamma}{g} \omega^2 - \frac{E F}{\varrho^2} \right) \bar{r} - (1 + \varepsilon_0) \frac{E F}{\varrho^2} \bar{t}' = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23),$$

$$\frac{E F}{\varrho^2} \bar{t}'' + \left(\frac{\gamma}{g} \omega^2 - \varepsilon_0 \frac{E F}{\varrho^2} \right) \bar{t} + (1 + \varepsilon_0) \frac{E F}{\varrho^2} \bar{r}' = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24).$$

Man kann diese Gleichungen übrigens auch, wie nur kurz bemerkt werden möge, in einfacher Weise aus dem Energiesatz und der Minimaleigenschaft der Eigenwerte herleiten. Setzt man im Energiesatz

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (A + V + T) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (25)$$

für A, V und T die Werte aus den Gl. (10), (11) und (13) ein und verwendet wiederum den Ansatz Gl. (21) und (22), so gelangt man zur folgenden Gleichung

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0 E F \int_{-\Phi}^{+\Phi} (\bar{r} + \bar{t}') \, d\varphi + \frac{E F}{\varrho} \sin \omega \tau \int_{-\Phi}^{+\Phi} [\varepsilon_0 (\bar{r}' - \bar{t})^2 + (\bar{r} + \bar{t}')^2] \, d\varphi \\ - \frac{\varrho}{g} \omega^2 \sin \omega \tau \int_{-\Phi}^{+\Phi} \gamma (\bar{r}^2 + \bar{t}^2) \, d\varphi - \varrho \int_{-\Phi}^{+\Phi} \gamma \, \bar{r} \, d\varphi = 0 \end{aligned} \right\} \quad . \; . \quad (26).$$

die für alle Zeitpunkte erfüllt sein muß. Setzt man einmal $\tau = 0$ und ein zweites Mal $\tau = \frac{\pi}{2\,\omega}$, so erhält man aus den beiden sich so ergebenden Gleichungen für das Quadrat der Eigenfrequenz den Wert

$$\omega^2 = \frac{\dfrac{E\,F}{\varrho^2}\displaystyle\int_{-\Phi}^{+\Phi} [\varepsilon_0\,(\bar{r}' - \bar{t})^2 + (\bar{r} + \bar{t}')^2]\,d\,\varphi}{\dfrac{1}{g}\displaystyle\int_{-\Phi}^{+\Phi} \gamma\,(\bar{r}^2 + \bar{t}^2)\,d\,\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (27).$$

Von einem analog gebauten Ausdruck hätte man auszugehen bei der näherungsweisen Berechnung der Eigenschwingungszahlen von Seilen mit großem Durchhang, wobei dann der Krümmungsradius ϱ als veränderlich zu betrachten wäre.

Die Funktionen $\bar{r}$ und $\bar{t}$ sind nun so zu bestimmen, daß ω^2 ein Minimum wird. Diese Aufgabe kann auch so formuliert werden, daß das Zählerintegral zum Minimum zu machen ist, während das Nennerintegral einen festen Wert, z. B. eins, annimmt. Wendet man die Regeln der Variationsrechnung an und beachtet gleichzeitig, daß der auftretende Lagrangesche Faktor identisch wird mit dem gesuchten Minimalwert, so erhält man nach einfacher Rechnung wiederum die oben abgeleiteten Gl. (23) und (24).

Da die statische Anfangsdehnung ε_0 eine verhältnismäßig kleine Größe ist, kann sie wohl gegen die Einheit vernachlässigt werden.

Die in den Differentialgleichungen (23) und (24) auftretenden Koeffizienten enthalten noch die Größe γ, also das längs des Seiles veränderliche Eigengewicht, und sind somit variabel. Da diese Veränderlichkeit jedoch bei den angenommenen kleinen Durchhängen nur die Größenordnung von Hundertteilen erreicht und die Lösungen der Differentialgleichungen in stetiger Weise von deren Koeffizienten abhängen, soll im weiteren γ durch den Festwert γ_0 ersetzt werden.

Führt man zur Abkürzung folgende Bezeichnungen ein

$$\frac{E\,F}{\varrho^2} = a\,; \qquad \omega^2\,\frac{\gamma_0}{g} = b,$$

so ergibt sich endlich folgendes System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\varepsilon_0\,a\,\bar{r}'' + (b - a)\,\bar{r} - a\,\bar{t}' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (28),$$

$$a\,\bar{t}'' + (b - \varepsilon_0\,a)\,\bar{t} + a\,\bar{r}' = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (29),$$

welches durch Elimination einer Variabeln auf eine Differentialgleichung vierter Ordnung zurückgeführt werden kann. Diese lautet dann, wenn wieder ε_0 gegen die Einheit vernachlässigt wird,

$$\varepsilon_0\bar{r}'''' + (\mu - \varepsilon_0^2)\,\bar{r}'' + (\mu - \varepsilon_0)\,(\mu - 1)\,\bar{r} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (30),$$

wobei die dimensionslose Größe μ definiert ist durch

$$\mu = \frac{b}{a} = \frac{\gamma_0\,\varrho^2}{g\,E\,F}\,\omega^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (31).$$

Hierbei ist μ, welches dem Quadrat der Eigenfrequenz proportional ist, als Eigenwert des Problems anzusehen. Die Randbedingungen lauten:

$$\varphi = \pm\,\Phi \ldots\ldots \bar{r} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (32).$$

Der Ansatz

$$\bar{r} = e^{\lambda\,\varphi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (33)$$

liefert die charakteristische Gleichung

$$\varepsilon_0\,\lambda^4 + (\mu - \varepsilon_0^2)\,\lambda^2 + (\mu - \varepsilon_0)\,(\mu - 1) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (34),$$

deren vier Wurzeln gegeben sind durch

$$\lambda_{\mathrm{I,\,II}} = \pm \sqrt{-\frac{\mu-\varepsilon_0{}^2}{2\,\varepsilon_0} + \sqrt{\frac{(\mu-\varepsilon_0{}^2)^2}{4\,\varepsilon_0{}^2} - \frac{(\mu-\varepsilon_0)(\mu-1)}{\varepsilon_0}}} = \pm\,\lambda_1 \quad \ldots \quad (35),$$

$$\lambda_{\mathrm{III,\,IV}} = \pm\, i \sqrt{\frac{\mu-\varepsilon_0{}^2}{2\,\varepsilon_0} + \sqrt{\frac{(\mu-\varepsilon_0{}^2)^2}{4\,\varepsilon_0{}^2} - \frac{(\mu-\varepsilon_0)(\mu-1)}{\varepsilon_0}}} = \pm\, i\,\lambda_2 \quad \ldots \quad (36).$$

Die Lösung für $\bar{t}$ muß dabei ebenfalls den Randbedingungen

$$\varphi = \pm\,\Phi \ldots\ldots \bar{t} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

gehorchen.

Die allgemeinste Form der Lösung ist somit

$$\bar{r} = A\,\mathfrak{Cof}\,\lambda_1\,\varphi + B\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_1\,\varphi + C\cos\lambda_2\,\varphi + D\sin\lambda_2\,\varphi \quad \ldots\ldots \quad (38),$$

$$\bar{t} = G\,\mathfrak{Cof}\,\lambda_1\,\varphi + K\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_1\,\varphi + L\cos\lambda_2\,\varphi + M\sin\lambda_2\,\varphi \quad \ldots\ldots \quad (39).$$

Zwischen den acht verfügbaren Konstanten der Lösungen bestehen nun vier feste, aus den Differentialgleichungen (28) und (29) fließende Beziehungen. Setzt man die Lösung für $\bar{r}$ (Gl. (38)) in Gl. (29) ein, so ergeben sich, da die Koeffizienten von $\mathfrak{Cof}\,\lambda_1\,\varphi$, $\mathfrak{Sin}\,\lambda_1\,\varphi$, $\cos\lambda_2\,\varphi$ und $\sin\lambda_2\,\varphi$ für sich verschwinden müssen, die folgenden Beziehungen zwischen den Konstanten:

$$G = -\frac{\lambda_1}{\lambda_1{}^2+\mu-\varepsilon_0}\,B;\quad K = -\frac{\lambda_1}{\lambda_1{}^2+\mu-\varepsilon_0}\,A;\quad L = \frac{\lambda_2}{\lambda_2{}^2-\mu+\varepsilon_0}\,D;\quad M = -\frac{\lambda_2}{\lambda_2{}^2-\mu+\varepsilon_0}\,C \quad (40).$$

Die Lösung für $\bar{t}$ kann daher auch in folgender Form geschrieben werden:

$$\bar{t} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_1{}^2+\mu-\varepsilon_0}\,[B\,\mathfrak{Cof}\,\lambda_1\,\varphi + A\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_1\,\varphi] + \frac{\lambda_2}{\lambda_2{}^2-\mu+\varepsilon_0}\,[D\cos\lambda_2\,\varphi - C\sin\lambda_2\,\varphi] \quad . \quad (41).$$

Unterwirft man die Lösungen Gl. (38) und (41) endlich noch den Randbedingungen, so erhält man für die Verhältnisse der Konstanten je die beiden Werte

$$\frac{C}{A} = -\frac{\mathfrak{Cof}\,\lambda_1\,\Phi}{\cos\lambda_2\,\Phi} = -\frac{\lambda_1\,(\lambda_2{}^2-\mu+\varepsilon_0)\,\mathfrak{Sin}\,\lambda_1\,\Phi}{\lambda_2\,(\lambda_1{}^2+\mu-\varepsilon_0)\sin\lambda_2\,\Phi} \quad \ldots\ldots \quad (42),$$

$$\frac{D}{B} = -\frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda_1\,\Phi}{\sin\lambda_2\,\Phi} = +\frac{\lambda_1\,(\lambda_2{}^2-\mu+\varepsilon_0)\,\mathfrak{Cof}\,\lambda_1\,\Phi}{\lambda_2\,(\lambda_1{}^2+\mu-\varepsilon_0)\cos\lambda_2\,\Phi} \quad \ldots\ldots \quad (43).$$

Die Befriedigung der Randbedingungen ist daher nur möglich, wenn die Werte von μ einer der folgenden „Frequenzgleichungen“ genügen:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1{}^2+\mu-\varepsilon_0}\,\mathfrak{Tg}\,\lambda_1\,\Phi = \frac{\lambda_2}{\lambda_2{}^2-\mu+\varepsilon_0}\,\mathrm{tg}\,\lambda_2\,\Phi \quad \ldots\ldots \quad (44),$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1{}^2+\mu-\varepsilon_0}\,\mathfrak{Ctg}\,\lambda_1\,\Phi = -\frac{\lambda_2}{\lambda_2{}^2-\mu+\varepsilon_0}\,\mathrm{ctg}\,\lambda_2\,\Phi \quad \ldots\ldots \quad (45).$$

Diese Werte von μ sind dann die „Eigenwerte“ des Problems und die zugehörigen Lösungen für $\bar{r}$ und $\bar{t}$ die „Eigenfunktionen“. Man ersieht ferner, daß man entsprechend der Existenz zweier Frequenzgleichungen zwei Reihen von Eigenwerten erhält. Demgemäß zerfallen die Eigenlösungen in zwei Gruppen. Die zu Gl. (44) gehörenden Lösungen haben die Form

Symmetrische Eigenschwingungen

$$r = A\left[\mathfrak{Cof}\,\lambda_1\,\varphi - \frac{\mathfrak{Cof}\,\lambda_1\,\Phi}{\cos\lambda_2\,\Phi}\cos\lambda_2\,\varphi\right]\sin\omega\,\tau \quad \ldots\ldots \quad (46),$$

$$t = A\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1{}^2+\mu-\varepsilon_0}\left[-\mathfrak{Sin}\,\lambda_1\,\varphi + \frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda_1\,\Phi}{\sin\lambda_2\,\Phi}\sin\lambda_2\,\varphi\right]\sin\omega\,\tau \quad . \quad . \quad (47).$$

In diesem Falle ist die Gestalt des Seiles nach der Verschiebung wiederum bezüglich der Mittellotrechten symmetrisch.

Das zweite, zur Frequenzgleichung (45) gehörige System der Eigenlösungen

Unsymmetrische Eigenschwingungen

$$r = B\left[\mathfrak{Sin}\,\gamma_1\varphi - \frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda_1\Phi}{\sin\lambda_2\Phi}\sin\lambda_2\varphi\right]\sin\omega\tau \quad \ldots \quad (48),$$

$$t = B\cdot\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2+\mu-\varepsilon_0}\left[-\mathfrak{Cof}\,\lambda_1\varphi + \frac{\mathfrak{Cof}\,\lambda_1\Phi}{\cos\lambda_2\Phi}\cos\lambda_2\varphi\right]\sin\omega\tau \quad \ldots \quad (49)$$

entspricht einer bezüglich der Mittellotrechten unsymmetrischen Form des verschobenen Seiles.

A und B sind frei wählbare Konstanten, welche die Größe der Schwingungsamplituden bestimmen. Die Ermittlung der Eigenwerte erfolgt am einfachsten auf zeichnerischem Wege.

5. Die zu der im Ruhezustande bereits vorhandenen statischen Dehnung ε_0 hinzutretende dynamische Dehnung ε_1 ergibt sich aus Gl. (8) unter Benutzung der Ausdrücke für r und t (Gl. (46) und (47) bzw. (48) und (49)). Damit ist dann auch die dynamische Zusatzspannung σ_1 gegeben

$$\sigma_1 = E\cdot\varepsilon_1 \quad \ldots \quad (50).$$

Hier möge noch kurz auf einen wesentlichen Punkt hingewiesen werden. Die Zusatzspannung σ_1 setzt sich (vgl. Gl. (8)) aus zwei Bestandteilen zusammen:

$$\sigma_{1,a} = \frac{E}{\varrho}(r + t') \quad \ldots \quad (51)$$

und

$$\sigma_{1,b} = \frac{E}{2\varrho^2}(r' - t)^2 \quad \ldots \quad (52).$$

Es ist nun zu beachten, daß für die beiden Schwingungsendlagen ($\sin\omega\tau = +1$ bzw. $\sin\omega\tau = -1$) der Anteil $\sigma_{1,a}$ entgegengesetzt-gleiche Werte annimmt, während $\sigma_{1,b}$ infolge des quadratischen Auftretens der Verschiebungsgrößen in beiden Endlagen den gleichen Wert erhält. Weiter ist leicht zu sehen, daß einerseits für größere Amplituden, andererseits für Eigenschwingungen höherer Ordnung der Anteil $\sigma_{1,b}$ eine wachsende Rolle spielt.

Dies ist vorstellungsmäßig ohne weiteres einzusehen. Bei kleinen Amplituden tritt beim Ausschwingen des Seiles nach unten eine Spannungserhöhung, beim Ausschwingen nach oben eine Spannungsverminderung ein. Im ersten Falle wird die Seillänge vergrößert, im zweiten Falle verkleinert. Überschreitet jedoch die Amplitude ein gewisses Maß, so tritt auch beim Aufwärtsschwingen eine Spannungserhöhung ein, wenn in der Endlage die Seillänge größer als in der Ruhelage wird.

Schließlich ist leicht erklärlich, daß bei einer Schwingungsform höherer Ordnung der Unterschied der Spannungswerte für die beiden Endlagen immer kleiner wird; der Einfluß der ursprünglichen Seilgestalt tritt hier bereits zurück.

6. Zur Veranschaulichung der Ergebnisse diene das folgende Beispiel. Es möge ein Seil von folgenden Abmessungen zugrunde gelegt werden:

halbe Spannweite	$W = 98{,}1$ m,
statischer Durchhang	$h = 4{,}9$ m,
Eigengewicht (mit Eislast)	$\gamma = 0{,}830$ kg/m,
Querschnitt	$F = 0{,}626$ cm^2,
Elastizitätsmaß	$E = 1{,}3\cdot 10^6$ kg/cm^2.

Hieraus folgt zunächst der Krümmungsradius zu

$$\varrho = \frac{W^2 + h^2}{2h} = 981 \text{ m},$$

während sich für die statische Dehnung (Gl. (5)) und die Konstante μ (Gl. (31)) die Werte ergeben:

$$\varepsilon_0 = 10^{-3}, \qquad \mu = 0{,}1^{\mathrm{sec}^2} \cdot \omega^2 .$$

Mit diesen Werten hat nun die graphische Auflösung der Frequenzgleichungen (44) und (45) zu erfolgen; sie liefert für die ersten fünf Eigenfrequenzen die Werte:

Symmetr. Eigenschwingungen: $\omega_{1,s} = 3{,}155\,s^{-1}$; $\omega_{2,s} = 4{,}86\,s^{-1}$; $\omega_{3,s} = 7{,}88\,s^{-1}$.

Unsymmetr. Eigenschwingungen: $\omega_{1,u} = 3{,}138\,s^{-1}$; $\omega_{2,u} = 6{,}28\,s^{-1}$.

Im folgenden wurden dann die jeweiligen Schwingungsformen und dynamischen Zusatzspannungen berechnet und graphisch dargestellt (Abb. 2 bis 5). Dabei wurden, um eine Vergleichsmöglichkeit zu haben, die Amplituden sämtlicher Eigenschwingungen gleichgroß gewählt; sie betragen stets 0,1 m. Die Konstanten A und B sind dementsprechend für jede Schwingungsform gesondert ermittelt worden. 539

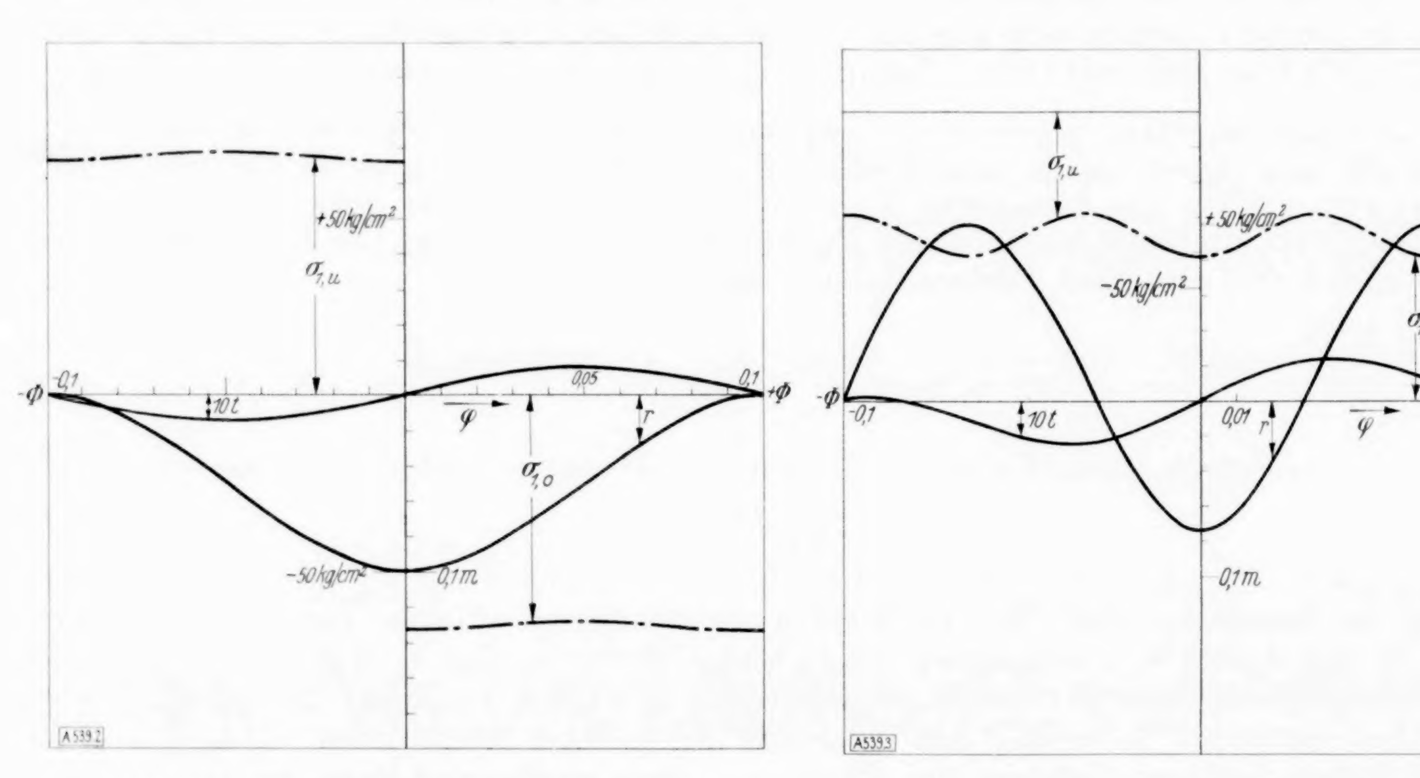


Abb. 2. 1. Symmetrische Eigenschwingung. Abb. 3. 2. Symmetrische Eigenschwingung.

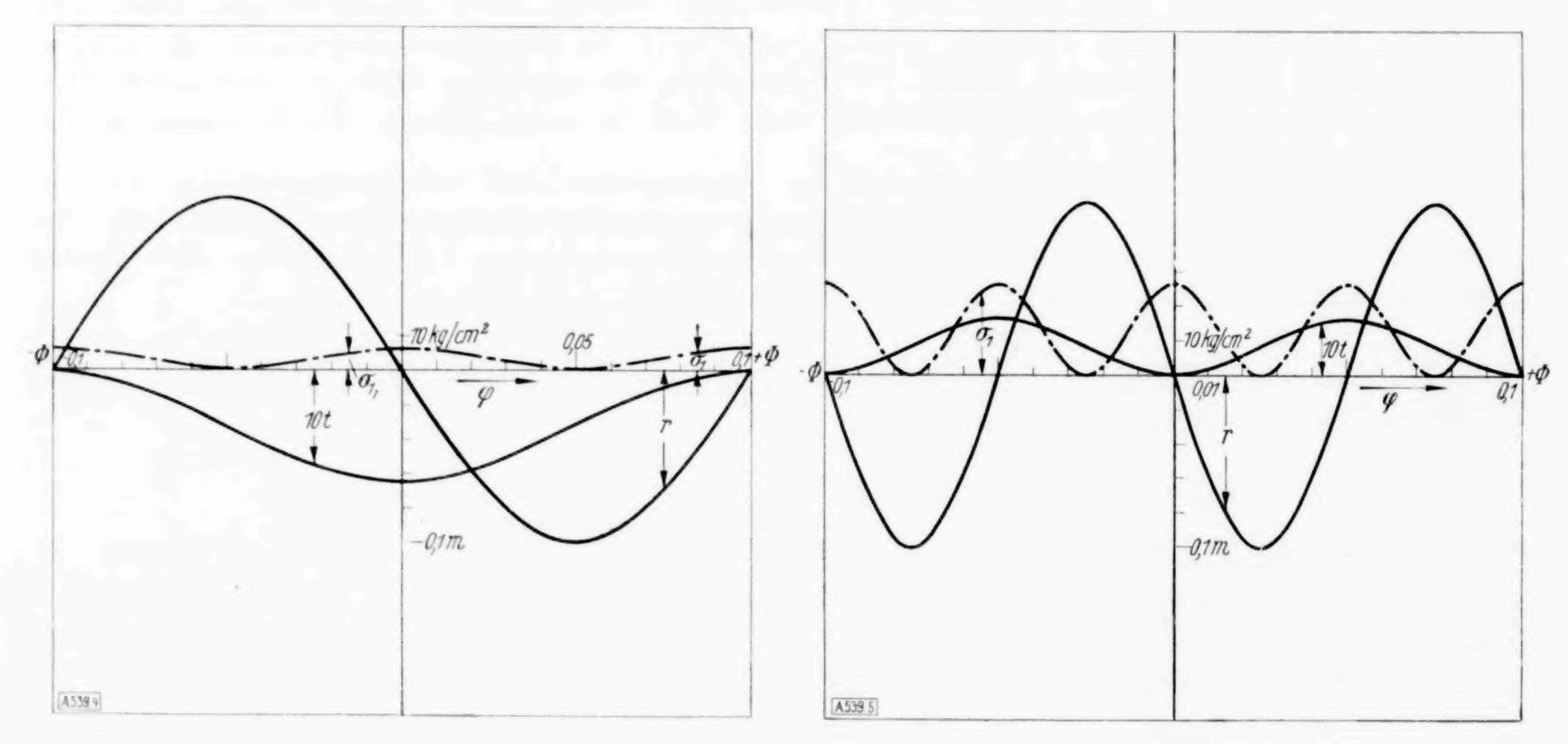


Abb. 4. 1. Unsymmetrische Eigenschwingung. Abb. 5. 2. Unsymmetrische Eigenschwingung.

Bemerkungen zu den Abbildungen:

r und t: Positive Verschiebungen nach abwärts aufgetragen; Tangentialverschiebungen t zehnfach überhöht.

σ_1: Positive Zusatzspannungen nach aufwärts aufgetragen. $\sigma_{1,o}$ bzw. $\sigma_{1,u}$ bedeuten die Zusatzspannungen in der oberen bzw. unteren Schwingungsendlage. (In den Abb. 4 und 5 wurde infolge des geringen Unterschiedes nur je eine Kurve eingetragen.)

Beschleunigungswiderstand geradlinig bewegter Körper in einer idealen Flüssigkeit.

Von *Stefan Neumark* in Warschau.

Bekanntlich wirkt auf einen in idealer Flüssigkeit mit Beschleunigung bewegten Körper auch bei Potentialströmung ein sog. Beschleunigungswiderstand[1]), welcher z. B. für eine Kugel der halben Trägheitskraft der verdrängten Flüssigkeit gleich ist, für einen Kreiszylinder bei zweidimensionaler Strömung hingegen der vollen Trägheitskraft der verdrängten Flüssigkeit entspricht. Es handelt sich nun um Aufstellung allgemeiner Formeln für diesen Beschleunigungswiderstand, wobei manchmal, namentlich für unsymmetrische oder schief gestellte Körper, auch ein Beschleunigungsauftrieb hinzutreten kann. Dies an sich vom praktischen Standpunkte vielleicht wenig bedeutende Problem scheint mir doch deshalb wichtig, weil bei ihm — trotz seiner scheinbaren Einfachheit — bis jetzt eine gewisse Unklarheit herrscht, die zuweilen zu merkwürdigen Widersprüchen und Mißverständnissen Anlaß gibt. Diese treten besonders in den Fällen hervor, wo es sich einerseits um Absolutbewegung des Körpers in der (im Unendlichen ruhenden) Flüssigkeit handelt, andererseits um reziproke Bewegung, bei welcher der Körper als ruhend, die Flüssigkeit dagegen als beschleunigt strömend angesehen wird. Dies sind zwei vollständig verschiedene Probleme, was schon a priori daraus ersichtlich ist, daß das Relativitätsprinzip der Mechanik für beschleunigte Bewegungen keineswegs gilt. Dennoch finden wir bisweilen vorbehaltlose Übertragung der auf ein Gebiet sich beziehenden Betrachtungen auf das andere, wobei man zu unzutreffenden Resultaten gelangen kann.

Daß die Beschleunigungswiderstände in beiden Fällen wesentlich verschieden sein können, wollen wir zunächst an einem einfachen Beispiel feststellen.

Als Ausgangsformel wählen wir die allgemeine Bernoullische Gleichung für nichtstationäre Strömungen, die — unter Annahme konstanter Dichte und ohne Berücksichtigung des hydrostatischen Auftriebsgliedes — lautet:

$$p = C - \frac{\varrho w^2}{2} - \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

(p — Druck, ϱ — Dichte, w — absolute Geschwindigkeit, t — Zeit, Φ — auf raumfestes Koordinatensystem bezogenes Geschwindigkeitspotential, C — Konstante, die von der Zeit abhängig sein darf). Wir betrachten zuerst einen unbewegten Körper, dessen Umströmung durch das Geschwindigkeitspotential:

$$\Phi = -u \cdot \varphi(x, y, z) \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

bestimmt ist, wobei x, y, z auf ein mit dem Körper fest verbundenes, also in diesem Falle unbewegtes Achsenkreuz sich beziehen, φ eine von t unabhängige Ortsfunktion ist, deren Verhältnis zu x im Unendlichen sich asymptotisch dem Werte 1 nähert und deren Ableitung nach der Flächennormale $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ in jedem Punkte der Körperoberfläche verschwindet, u hingegen eine Geschwindigkeit bezeichnet, welche eine beliebige differenzierbare Zeitfunktion ist. Somit haben wir mit einer beliebig beschleunigten Umströmung in negativer x-Richtung zu tun. Infolge von (2) finden wir aus (1):

$$p = C - \frac{\varrho u^2}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] + \varrho \frac{d u}{d t} \cdot \varphi \quad \ldots \ldots \quad (3),$$

und die resultierende Kraft in negativer x-Richtung (Widerstand) ergibt sich als:

$$W = W_g + W_b \quad \ldots \ldots \quad (4),$$

wobei das erste Glied:

$$W_g = -\frac{\varrho u^2}{2} \int\!\!\int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] \cdot d\sigma \cdot \cos(n, x)$$

den „Geschwindigkeitswiderstand" darstellt und bekanntlich beim eindeutigen Potential gleich Null ist, dagegen das zweite Glied:

$$W_b = \varrho \cdot \frac{d u}{d t} \int\!\!\int \varphi \cdot d\sigma \cdot \cos(n, x) \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

den gesuchten Beschleunigungswiderstand bedeutet ($d\sigma$ — Oberflächenelement).

[1]) Siehe z. B. H. Lamb: Lehrbuch der Hydrodynamik, Teubner 1907, S. 93 bis 94, 143. — Prandtl-Tietjens: Hydro- und Aeromechanik, Springer 1929, II B., S. 123. — P. Painlevé: Leçons sur la résistance des fluides non visqueux, Paris 1930, S. 9 bis 10. — A. Métral: Sur les résistances en vol uniformément varié et sur l'effet Katzmayr, Verhandlungen des 3. Internationalen Kongresses für Technische Mechanik, Stockholm 1930, S. 403 ff.

Nehmen wir als Beispiel eine Kugel vom Radius a, so lautet das Geschwindigkeitspotential (in räumlichen Polarkoordinaten — Abb. 1):

$$\varphi = \left(r + \frac{a^3}{2\,r^2}\right)\cos\vartheta \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

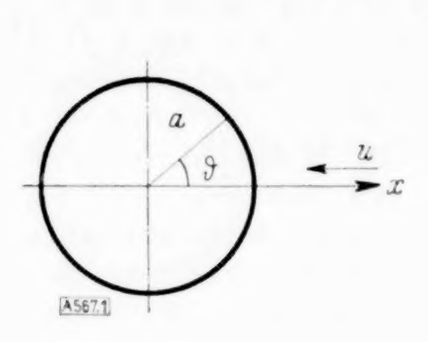


Abb. 1.

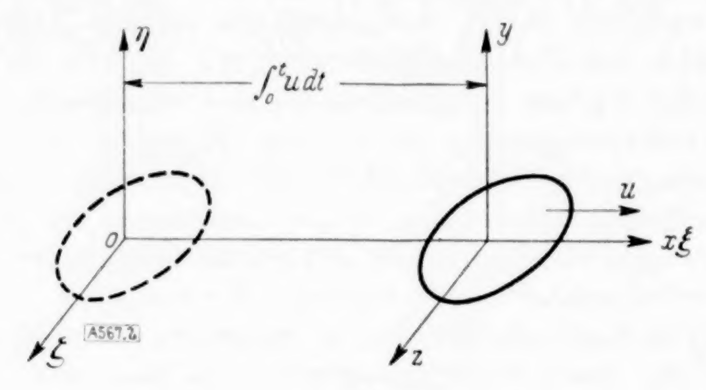


Abb. 2.

Wenn wir die Kugeloberfläche in Parallelkreisstreifen unterteilen, erhalten wir (für $r = a$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$):

$$W_b = \varrho \cdot \frac{d\,u}{d\,t} \cdot \int_0^\pi \frac{3}{2}\,a\cos\vartheta \cdot 2\,\pi\,a^2\sin\vartheta\,d\,\vartheta \cdot \cos\vartheta = \varrho \cdot \frac{d\,u}{d\,t} \cdot 2\,\pi\,a^3 = \frac{3}{2}\,M \cdot \frac{d\,u}{d\,t} \quad . \quad . \quad (7).$$

Somit beträgt in diesem Falle der Widerstand dreimal soviel wie bei bewegter Kugel. Es ist zu bemerken, daß die Differenz der beiden Widerstände der vollen Trägheitskraft der verdrängten Flüssigkeit gleich ist.

Es gilt nun, was schon das obige Beispiel vermuten läßt, der allgemeine

Satz: Die Differenz der Beschleunigungswiderstände für denselben Körper in den Fällen der beschleunigten Umströmung und einer beschleunigten Körperbewegung ist gleich der Trägheitskraft der vom Körper verdrängten Flüssigkeit.

Beweis. Bezeichnen wir wieder mit x, y, z die Koordinaten in einem mit dem Körper verbundenen, also diesmal mitbewegten Achsenkreuz, dagegen mit ξ, η, ζ die Koordinaten des raumfesten Bezugssystems (Abb. 2), so bestehen die Beziehungen:

$$x = \xi - \int_0^t u\,d\,t, \qquad \frac{\partial\,x}{\partial\,t} = -u \quad . \quad . \quad . \quad (8),$$

$$y = \eta\,, \qquad z = \zeta \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Bezeichnen wir weiter mit $\Phi^*(\xi, \eta, \zeta)$, w^*, p^*, W^*, $W_b{}^*$ das Geschwindigkeitspotential, die absolute Geschwindigkeit, den Druck, den Widerstand und den Beschleunigungswiderstand im Falle der beschleunigten Körperbewegung, so gilt zunächst, im Anschluß an die Formel (2):

$$\Phi^*(\xi, \eta, \zeta) = -u \cdot \varphi(x, y, z) + u\,\xi + K(t) \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

wobei x, y, z mit Hilfe von (8, 9) durch ξ, η, ζ ausgedrückt sind und K die unbestimmte Zeitfunktion ist. Wir erhalten dann:

$$w^{*2} = \left(\frac{\partial\,\Phi^*}{\partial\,\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\Phi^*}{\partial\,\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\Phi^*}{\partial\,\zeta}\right)^2 = u^2\left[\left(-\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,x} + 1\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,z}\right)^2\right] = w^2 - 2\,u^2\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,x} + u^2 \quad . \quad (11);$$

$$\frac{\partial\,\Phi^*}{\partial\,t} = -\frac{d\,u}{d\,t}\cdot\varphi(x, y, z) + u^2\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,x} + \xi\,\frac{d\,u}{d\,t} + K'(t) \quad . \quad . \quad . \quad (12);$$

$$\left.\begin{aligned} p^* = C^*(t) - \frac{\varrho\,w^{*2}}{2} - \varrho\,\frac{\partial\,\Phi^*}{\partial\,t} = C^*(t) - \frac{\varrho\,w^2}{2} + \varrho\,u^2\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,x} - \frac{\varrho\,u^2}{2} + \varrho\,\frac{d\,u}{d\,t}\,\varphi - \varrho\,u^2\frac{\partial\,\varphi}{\partial\,x} \\ - \varrho\,\xi\,\frac{d\,u}{d\,t} - \varrho\,K'(t) = p - \varrho\,\frac{d\,u}{d\,t}\,\xi + C_1(t) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (13),$$

wobei p den früheren Druck (Formel (3)) und $C_1(t)$ eine neue Zeitfunktion bedeutet. Es wird weiter:

$$W^* = \int\!\!\int p^*\,d\sigma\cdot\cos(n, \xi) = W - \int\!\!\int \varrho\,\frac{d\,u}{d\,t}\,\xi\cdot d\sigma\cdot\cos(n, \xi) + \int\!\!\int C_1(t)\cdot d\sigma\cdot\cos(n, \xi)\,,$$

und schließlich, da das letzte Integral identisch verschwindet:

$$W - W^* = W_b - W_b{}^* = \varrho\cdot\frac{d\,u}{d\,t}\int\!\!\int \xi\,d\sigma\cdot\cos(n, \xi) = \varrho\cdot\frac{d\,u}{d\,t}\cdot V = M\,\frac{d\,u}{d\,t} \quad . \quad . \quad . \quad (14),$$

w. z. b. w.

Zusatz. Die Beschleunigungsquerkräfte sind in beiden Fällen, also für beschleunigte Umströmung und beschleunigte Körperbewegung, die gleichen.

Beweis. Es handelt sich um y- und z-Komponenten der resultierenden Kraft, sofern solche überhaupt vorhanden sind. Die Rechnung unterscheidet sich nicht von der zuletzt durchgeführten; nur muß in der Formel (14) unter dem Integralzeichen $\cos(n, \xi)$ resp. durch $\cos(n, \eta)$ oder $\cos(n, \zeta)$ ersetzt werden, worauf das betreffende Integral verschwindet. Der Zusatz gilt namentlich für den Beschleunigungsauftrieb.

Es genügt folglich, in jedem Sonderfalle die Beschleunigungskraftkomponenten nur für eine Bewegungsart zu berechnen. Wenn es sich um ebene Strömungsvorgänge handelt, so ist es besonders leicht, die Kräfte beim ruhenden Körper (Zylinder vom beliebigen Querschnitt) und beschleunigter Strömung zu berechnen, wobei mit Vorteil das komplexe Potential benutzt werden kann. Die Formel (5) gibt in diesem Falle für den Beschleunigungswiderstand pro Längeneinheit des Zylinders:

$$W_b = \varrho \cdot \frac{d u}{d t} \oint \varphi \, d y \quad \ldots \quad (15);$$

analog drückt sich der Beschleunigungsauftrieb aus:

$$A_b = \varrho \frac{d u}{d t} \oint \varphi \, d x \quad \ldots \quad (15a),$$

somit:

$$A_b + i\, W_b = \varrho \frac{d u}{d t} \oint \varphi \cdot d z \quad \ldots \quad (16).$$

Da aber im betrachteten Falle eines ruhenden Zylinders die (zu φ konjugierte) Stromfunktion ψ existiert, welche obendrein längs des Querschnittsumrisses konstant bleibt, so haben wir:

$$\varrho \frac{d u}{d t} \oint \psi \, d z = 0 \quad \ldots \quad (17).$$

Aus (16) und (17) folgt nun:

$$A_b + i\, W_b = \varrho \frac{d u}{d t} \oint (\varphi + i\,\psi)\, d z = \varrho \frac{d u}{d t} \oint f \cdot d z \quad \ldots \quad (18),$$

wobei f das komplexe Potential (ohne Geschwindigkeitsfaktor) bezeichnet. Führen wir noch eine Abbildungsfunktion ein

$$z = F(Z),$$

die das Außengebiet des Querschnitts auf dasjenige des Kreises mit bekannten Bedingungen abbildet, so wird:

$$A_b + i\, W_b = \varrho \frac{d u}{d t} \oint f(Z) \cdot \frac{d z}{d Z} \cdot d Z \quad \ldots \quad (19),$$

wobei es genügt, f nur in Z auszudrücken, wonach die Integration längs des Kreisumrisses auszuführen ist. Die Formel (19) ist der ersten Blasiusschen Formel analog.

In den Anwendungen wird man meistens als Ausgangsprofil den Kreis $|Z| = a$ und als Ausgangspotential:

$$f(Z) = Z + \frac{a^2}{Z} \quad \ldots \quad (20)$$

nehmen.

Beispiel. Elliptischer Zylinder:

$$z = Z + \frac{k\,a^2}{Z}; \qquad \frac{d z}{d Z} = 1 - \frac{k\,a^2}{Z^2}.$$

Die Achsen der Ellipse sind $2a(1+k)$ und $2a(1-k)$, die relative Dicke $\delta = \frac{1-k}{1+k}$. Die Formel (19) ergibt:

$$A_b + i\, W_b = \varrho \frac{d u}{d t} \oint \left(Z + \frac{a^2}{Z}\right)\left(1 - \frac{k\,a^2}{Z^2}\right) d Z = \varrho \frac{d u}{d t} \cdot a^2 (1-k) \cdot 2\pi i,$$

woraus:

$$A_b = 0; \qquad W_b = \varrho \frac{d u}{d t} \cdot 2\pi a^2 (1-k);$$

$$W_b^* = \varrho \frac{d u}{d t} [2\pi a^2 (1-k) - \pi a^2 (1-k^2)] = \varrho \frac{d u}{d t} \cdot \pi a^2 (1-k)^2;$$

$$W_b : W_b^* = 2 : (1-k) = \frac{1}{\delta} + 1;$$

dieses Verhältnis kann also bei kleinem δ beliebig große Werte annehmen.

Insbesondere für einen Kreiszylinder ($k=0$) ist es:

$$W_b = 2\, W_b^* = \varrho \frac{d\,u}{d\,t} \cdot 2\,\pi\, a^2 = 2\, M \frac{d\,u}{d\,t};$$

für eine quer umströmte unendlich lange ebene Platte ($k = -1$) ergibt sich:

$$W_b = W_b^* = \varrho \cdot \frac{d\,u}{d\,t} \cdot 4\,\pi\, a^2 .$$

Für dreidimensionale Strömungen muß natürlich zur Berechnung von W_b die allgemeine Formel (5) benutzt werden. Man kann aber oft mit Vorteil W_b^* berechnen, indem man die von der Translation eines Körpers herrührende kinetische Energie der im Unendlichen ruhenden Flüssigkeit bestimmt, wozu man manche Anweisungen im V. Kapitel des Lambschen Handbuches finden kann. Hier begnügen wir uns mit dem folgenden

Beispiel. Nach Green und Lamb[2]) wird für die Bewegung in Richtung der x-Achse eines Rotationsellipsoids mit den Halbachsen a, b, b die kinetische Energie der Flüssigkeit durch:

$$2\,T = \frac{\alpha_0}{2-\alpha_0} \cdot \frac{4}{3}\,\pi\, a\, b\, c \cdot \varrho\, u^2 \quad \text{. . . . . (21)}$$

gegeben, wo

$$\alpha_0 = a\, b^2 \int\limits_0^\infty \frac{d\,\lambda}{(a^2+\lambda)^{3/2}\,(b^2+\lambda)} \quad \text{. . . . . (22).}$$

Deshalb drückt sich der Beschleunigungswiderstand durch

$$W_b^* = \frac{\alpha_0}{2-\alpha_0} \cdot \frac{4}{3}\,\pi\, a\, b\, c \cdot \varrho \frac{d\,u}{d\,t} \quad \text{. . . . . (23)}$$

aus. Es errechnet sich nun das Integral (22) im Falle eines abgeplatteten Ellipsoids ($a \leq b$), als:

$$\alpha_0 = \frac{2\,(\sin\mu - \mu\cos\mu)}{\sin^3\mu}, \qquad \text{wo } \cos\mu = \frac{a}{b} \quad \text{. . . . . (24),}$$

somit der Trägheitskoeffizient:

$$S = \frac{\alpha_0}{2-\alpha_0} = \frac{\sin\mu - \mu\cos\mu}{\mu\cos\mu - \sin\mu \cdot \cos^2\mu} \quad \text{. . . . . (25).}$$

Für ein gestrecktes Ellipsoid ($a \geq b$) erhalten wir hingegen:

$$\alpha_0 = \frac{2\,(\nu\,\mathrm{Cosh}\,\nu - \mathrm{Sinh}\,\nu)}{\mathrm{Sinh}^3\,\nu}, \qquad \text{wo } \mathrm{Cosh}\,\nu = \frac{a}{b} \quad \text{. . . . . (26),}$$

und:

$$S = \frac{\nu\,\mathrm{Cosh}\,\nu - \mathrm{Sinh}\,\nu}{\mathrm{Sinh}\,\nu \cdot \mathrm{Cosh}^2\,\nu - \nu\,\mathrm{Cosh}\,\nu} \quad \text{. . . . . (27).}$$

Die folgende Tafel gibt eine Übersicht des Verlaufes von α_0, S und vom Verhältnisse $W_b : W_b^* = (1+S) : S$ für einige Werte von $a:b$.

$a:b$	μ	ν	α_0	S	$W_b : W_b^*$
0,0	1,57080	—	2,000	∞	1,000
0,2	1,36944	—	1,501	3,008	1,332
0,4	1,15928	—	1,176	1,428	1,700
0,6	0,92730	—	0,952	0,908	2,102
0,8	0,64350	—	0,789	0,651	2,535
1,0	0,00000	0,00000	0,667	0,500	3,000
1,2	—	0,62236	0,572	0,401	3,495
1,5	—	0,96242	0,466	0,304	4,292
2,0	—	1,31696	0,347	0,210	5,762
5,0	—	2,29243	0,112	0,059	17,915
∞	—	∞	0,000	0,000	∞

Insbesondere ist es für eine kreisförmige Lamelle vom Radius b $\left(\mu = \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\alpha_0 = 2; \qquad S = \infty; \qquad W_b = W_b^* = \frac{8}{3}\,\varrho\, b^3 \frac{d\,u}{d\,t} .$$

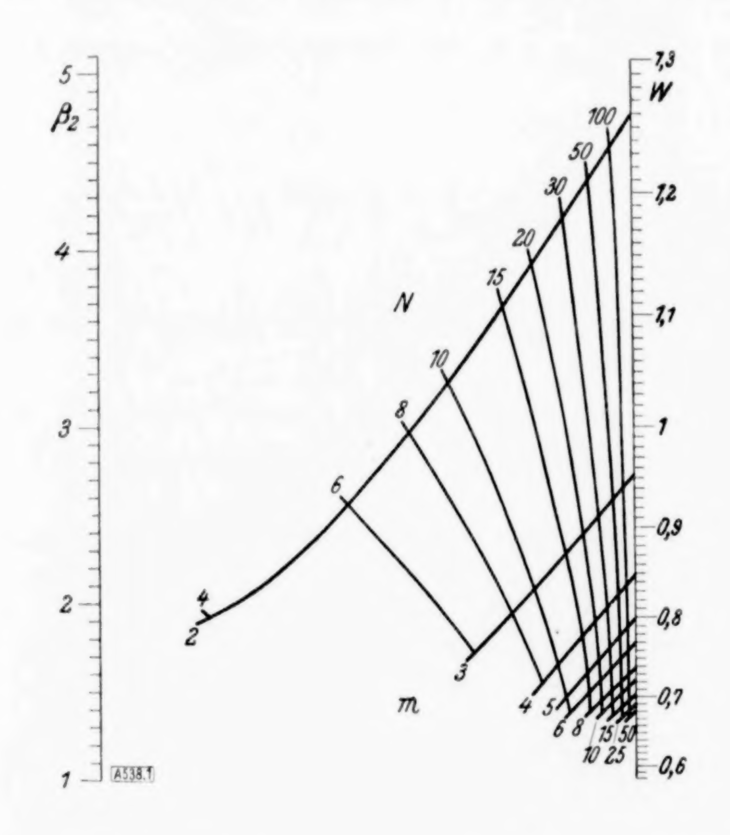
[2]) Lamb, l. c., S. 179—180.

KLEINE MITTEILUNGEN

Prüfung der Einheitlichkeit eines Massenfabrikates. In der gleich überschriebenen Abhandlung im Jahrg. 14 (1934), S. 77 bis 84 dieser Zeitschrift, habe ich eine Formel für die wahrscheinliche Abweichung der Lexisschen Zahl L von 1 für den Fall verschiedener Serienlängen abgeleitet, aber nicht weiter diskutiert. Dies soll hier für den Fall gleicher Serienlängen nachgeholt werden. Führt man in die Formeln (22) und (25) dieser Abhandlung anstatt der Serienlänge die Anzahl m der Serien ein, so erhält man für die wahrscheinliche Abweichung

$$w = 0{,}6745 \sqrt{\frac{(N-1)(2Nm - Nm^2 - 6N + 3m)\dfrac{M_4}{M_2^2}}{m(m-1)N(N-2)(N-3)} + \frac{((N-2)^3 m^2 + 3N^2(m-1) - 4N^2 m + 6Nm - m^2)}{m(m-1)N(N-2)(N-3)}},$$

wo N der Umfang des Gesamtkollektivs, M_2 bzw. M_4 das zweite bzw. vierte Moment der Verteilung um ihren Mittelwert sind. Da der Ausdruck nur einen Anhalt für die Unsicherheit von L geben soll, kommt es bei seiner Berechnung nicht auf große Genauigkeit an. Es genügt daher, den Wert von w aus dem nebenstehenden, nach obiger Formel



entworfenen Nomogramm zu entnehmen. Darin ist der leicht mit dem Rechenschieber zu berechnende Quotient $M_4 : M_2^2 = \beta_2$ gesetzt. Aus dem Nomogramm liest man ab, daß die Unsicherheit von L abnimmt:

1. mit wachsendem Quotienten $M_4 : M_2^2$,
2. bei konstantem Kollektivumfang N mit wachsender Serienzahl und damit mit Abnahme des Umfanges der Einzelserie,
3. bei konstanter Serienzahl m mit Abnahme des Kollektivumfanges N und damit mit Abnahme des Umfanges jeder Serie.

Wendet man unsere Formel auf Stichproben an, so nimmt sie den Charakter einer Näherungsformel an, die eine um so bessere Näherung liefert, je größer der Umfang der Stichprobe ist. Andererseits wird man diesen Umfang aber nicht zu groß machen, denn die Arbeit wächst mit der Zahl der anzustellenden Messungen; ferner wird man, wenn es sich um zeitlich aufeinanderfolgende Serien handelt, diese nicht allzu groß wählen, da bei Auftreten von sprunghaften Änderungen die Feststellung der Änderungsstellen bei allzu langen Serien Schwierigkeit macht. Auf diesen Umstand weist insbesondere Shewhart: Economic Control of Quality of Manufactured Product, London 1931, S. 314, hin, der sich eingehend mit dieser Frage befaßt und Serien vom Umfange $n = 4$ vorschlägt. Dieser Umfang scheint, falls man nur Proben entnimmt, für die Anwendung obiger Formel zu klein, da dann der von ihr gelieferte Wert schätzungsweise mit einem Fehler von etwa 25% behaftet sein kann.

Aus dem Nomogramm ersieht man weiter, daß für einen größeren Kollektivumfang — etwa von $N = 50$ ab — w sich nur wenig von den $N \to \infty$ entsprechenden Grenzwerten unterscheiden. Aus obiger Formel findet man für $N \to \infty$

$$w_\infty = 0{,}6745 \sqrt{\frac{m^2+3}{m(m-1)}}.$$

Das Wesentliche an dieser Formel, die man stets für $N \geq 50$ verwenden wird, und die man leicht mit dem Rechenschieber auswertet, ist, daß hier der Wert M_4, den man sonst für die Schätzung der Unsicherheit von L besonders auszurechnen hat, nicht vorkommt, so daß man viel Rechenarbeit erspart.

Freiberg (Sa.). Fr. A. Willers. 538

Über den Einfluß der Vorspannung des Fahrbahnbelages einer Brücke auf deren Längsträger. I. Einleitung. Die Fahrbahnlängsträger hölzerner und eiserner Brücken findet man zuweilen so angeordnet, daß sie mit ihrer Oberkante nicht in einer Ebene, sondern auf dem Mantel eines sehr schwach gekrümmten Zylinders liegen (Abb. 1). Der elastische Fahrbahnbelag, der

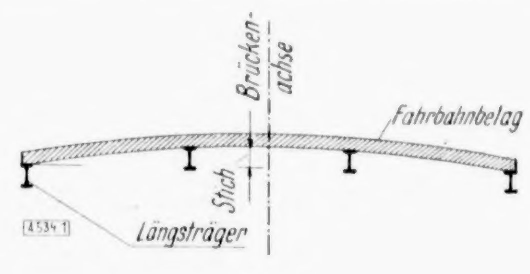


Abb. 1.

sich dem Mantel dieses Zylinders anschmiegt, erhält dadurch eine Vorspannung, die über dem Auflager der Fahrbahnlängsträger am größten ist und gegen die Trägermitte zu abnimmt, da die Längsträger selbst auch eine Durchbiegung erfahren. Im nachstehenden sollen die durch eine solche Vorspannung in den Längsträgern erzeugten Beanspruchungen ermittelt werden.

II. Fahrbahn mit drei Längsträgern (Abb. 2). Der Fahrbahnbelag habe die Stärke h und den Elastizitätsmodul E', die Längsträger seien in der Entfernung e voneinander angeordnet; das Trägheitsmoment des inneren (äußeren) Längsträgers sei J_1 bzw. J_2, ihr Elastizitätsmodul sei E. Der gegebene Höhenunterschied der Längsträgeroberkanten an den Auflagern betrage v, in der

Entfernung x vom Auflager Δ. Die vorläufig unbekannten Reaktionskräfte zwischen dem Belag und dem inneren, bzw. äußeren Längsträger seien mit $p_1(x)$, bzw. $p_2(x)$ bezeichnet.

Sind endlich y_1 und y_2 die Durchbiegungen der Längsträger an der Stelle x ($+y_1$ nach unten und $+y_2$ nach oben angenommen), so gelten folgende Gleichungen

$$p_1 = 2\,p_2 \text{ (Gleichgewichtsbedingung) } (1)$$

$$v = y_1 + y_2 + \Delta.$$

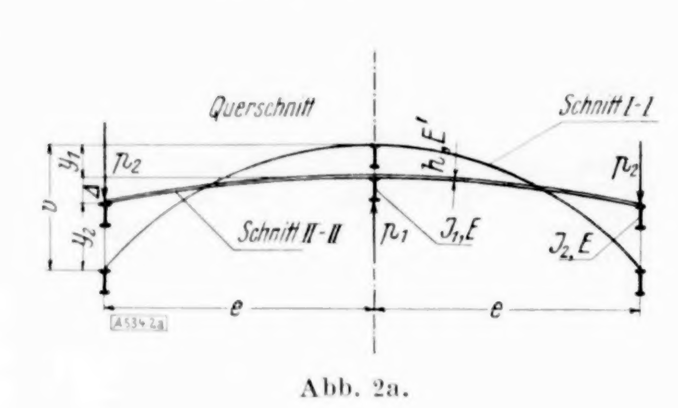


Abb. 2a.

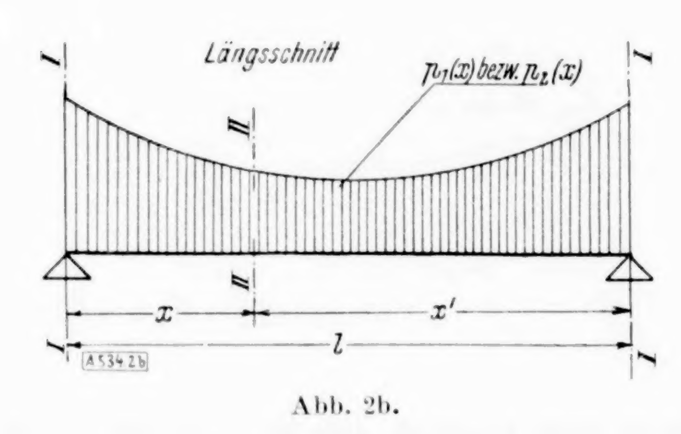


Abb. 2b.

Da $\Delta = \dfrac{e^3\,p_2}{3\,E'\,J'}$, so wird mit $J' = \dfrac{h^3}{12}$:

$$v = y_1 + y_2 + \frac{4\,e^3}{E'\,h^3}\,p_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Aus den für den geraden Stab gültigen Differentialgleichungen

$$E\,J_1\,y_1^{(\text{IV})} = p_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$E\,J_2\,y_2^{(\text{IV})} = p_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

folgt unter der Annahme, daß die Längsträger an den Enden gleichartig (drehbar oder eingespannt) gelagert sind,

$$y_1 = 2\,\frac{J_2}{J_1}\,y_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und damit gemäß den Gl. (1) und (2) die folgende Differentialgleichung für y_2:

$$y_2^{(\text{IV})} + 4\,\nu^4\,y_2 = v\,\frac{h^3\,E'}{4\,e^3\,E\,J_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

worin zur Abkürzung $\nu^4 = \dfrac{1}{16}\,\dfrac{h^3}{e^3}\,\dfrac{E'}{E}\,\dfrac{J_1 + 2\,J_2}{J_1\,J_2}$ gesetzt worden ist.

Für den praktisch weniger wichtigen und im weiteren nicht behandelten Fall der ungleichartigen Lagerung der Längsträger würde sich anstatt der Gl. (6) die Gleichung

$$y_2^{(\text{VIII})} + 4\,\nu^4\,y_2^{(\text{IV})} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

ergeben.

III. Fahrbahn mit vier Längsträgern (Abb. 3). Mit den vorhin erklärten Bezeichnungen

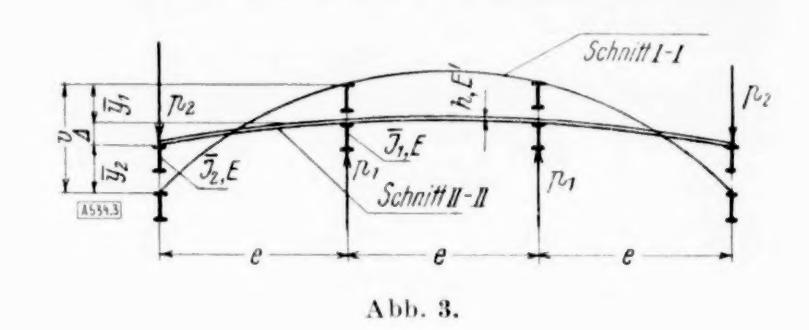


Abb. 3.

gelten hier die Gleichungen

$$p_1 = p_2 \text{ (Gleichgewichtsbedingung) } (8)$$

$$v = \bar{y}_1 + \Delta + \bar{y}_2.$$

Da $\Delta = \dfrac{5}{6}\,\dfrac{e^3}{E'\,J'}\,p_2$ ist, worin $J' = \dfrac{h^3}{12}$, so wird $\Delta = \dfrac{10\,e^3}{E'\,h^3}\,p_2$ und daher

$$v = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \frac{10\,e^3}{E'\,h^3}\,p_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9).$$

Für an den Enden gleichartig gelagerte Längsträger ist

$$\bar{y}_1 = \frac{\bar{J}_2}{\bar{J}_1}\,\bar{y}_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10),$$

und es folgt aus Gl. (9) und (10) im Verein mit Gl. (4)

$$\bar{y}_2^{(\text{IV})} + 4\,\nu^4\,\bar{y}_2 = v\,\frac{h^3\,E'}{4\,e^3\,E\,\bar{J}_2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6'),$$

worin $\nu^4 = \dfrac{1}{40}\,\dfrac{h^3}{e^3}\,\dfrac{E'}{E}\,\dfrac{\bar{J}_1 + \bar{J}_2}{\bar{J}_1 \cdot \bar{J}_2}$ ist.

Da die Gl. (6) und (6)' formal übereinstimmen, kann die weitere Behandlung der in den Abschnitten (II) und (III) beschriebenen Fälle gleichartig erfolgen, wenn der entsprechende ν-Wert Verwendung findet und wenn die Längsträger an den Enden gleichartig gelagert sind, da dann, wie eine nähere Untersuchung zeigt, die Zusammenhänge bestehen:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= 2\,\frac{J_2}{J_1}\,y_2 = \frac{2\,J_2}{J_1 + 2\,J_2}\cdot\frac{\bar{J}_1 + \bar{J}_2}{\bar{J}_2}\cdot\bar{y}_1 \\ &= \frac{2\,J_2}{J_1 + 2\,J_2}\cdot\frac{\bar{J}_1 + \bar{J}_2}{\bar{J}_1}\,\bar{y}_2 \end{aligned}\right\} \quad (11).$$

a) Freiaufliegende Längsträger. An den Auflagern ($x = 0$, $x = l$) müssen dann y_1 und y_2, sowie y_1^{II} und y_2^{II} verschwinden.

Ein System von vier unabhängigen Partikularlösungen der Differentialgleichung

$$y_2^{(IV)} + 4\,\nu^4\,y_2 = 0$$

ist durch die Ausdrücke

$$\cos\nu x\,\mathfrak{Cof}\,\nu x', \qquad \cos\nu x\,\mathfrak{Sin}\,\nu x',$$

$$\sin\nu x\,\mathfrak{Cof}\,\nu x', \qquad \sin\nu x\,\mathfrak{Sin}\,\nu x'$$

gegeben, woraus man erkennt, daß das vollständige Integral der Gl. (6) mit Beachtung obiger Randbedingungen und wegen der Gleichberechtigung der beiden Randpunkte $x=0$ und $x=l$ lauten muß

$$y_1 = 2\,\frac{J_2}{J_1}\,y_2$$

$$= \frac{2\,J_2}{J_1 + 2\,J_2}\,v\left\{1 - \frac{\cos\nu x\,\mathfrak{Cof}\,\nu x' + \mathfrak{Cof}\,\nu x\cos\nu x'}{\cos\nu l + \mathfrak{Cof}\,\nu l}\right\}.$$

Die in den Längsträgern erzeugten Momente sind

$$M_1 = 2\,M_2 = -E\,J_1\,y_1^{(II)}$$

$$= \frac{4\,E\,J_1\,J_2}{J_1 + 2\,J_2}\,v\,\nu^2\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\nu x\sin\nu x' + \sin\nu x\,\mathfrak{Sin}\,\nu x'}{\cos\nu l + \mathfrak{Cof}\,\nu l}$$

und die Querkräfte

$$Q_1 = 2\,Q_2 = -E\,J_1\,y^{(III)}$$

$$= \frac{4\,E\,J_1\,J_2}{J_1 + 2\,J_2}\,v\,\nu^3\,\frac{\mathfrak{Cof}\,\nu x\sin\nu x' - \mathfrak{Sin}\,\nu x\cos\nu x'}{\cos\nu l + \mathfrak{Cof}\,\nu l}$$

$$+ \frac{\cos\nu x\,\mathfrak{Sin}\,\nu x' - \sin\nu x\,\mathfrak{Cof}\,\nu x'}{\cos\nu l + \mathfrak{Cof}\,\nu l}.$$

Ein Grenzfall tritt dann auf, wenn für $x = \frac{l}{2}$, $p_1 = 2\,p_2 = 0$ wird (Abb. 4a), das heißt, wenn der

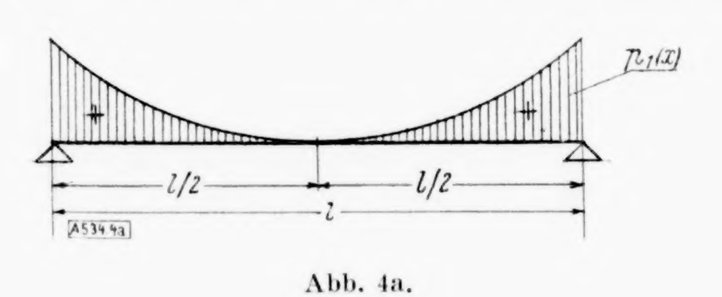


Abb. 4a.

Fahrbahnbelag in der Trägermitte ohne Vorspannung ist. Nun ist nach den Gl. (3) und (4)

$$p_1 = 2\,p_2$$

$$= \frac{8\,E\,J_1\,J_2}{J_1 + 2\,J_2}\,v\,\nu^4\,\frac{\cos\nu x\,\mathfrak{Cof}\,\nu x' + \mathfrak{Cof}\,\nu x\cos\nu x'}{\cos\nu l + \mathfrak{Cof}\,\nu l};$$

dieser Ausdruck nimmt für $x = \frac{l}{2}$ die Form

$$p_{1,\min} = 2\,p_{2,\min} = \frac{16\,E\,J_1\,J_2}{J_1 + 2\,J_2}\,v\,\nu^4\,D$$

an, wo

$$D = \frac{\cos\frac{\nu l}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\nu l}{2}}{\cos\nu l + \mathfrak{Cof}\,\nu l}$$

ist. Aus $D=0$ ergibt sich die Gleichung $\cos\frac{\nu l}{2}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{\nu l}{2} = 0$; der Grenzfall tritt also ein, wenn $\nu l = \pi, 3\,\pi, 5\,\pi, \ldots$ ist. Liegt νl zwischen π und $3\,\pi$, so haben p_1 und p_2 in der Mitte der Längsträger das entgegengesetzte Vorzeichen

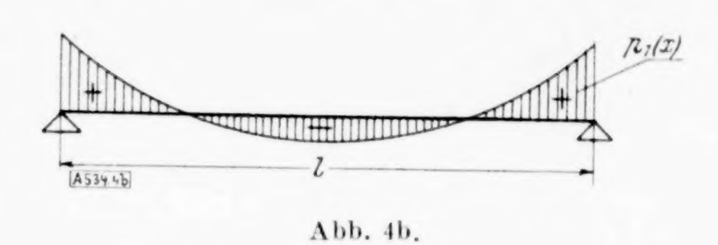


Abb. 4b.

(Abb. 4b) wie über den Auflagern, und es erleidet daher auch der Belag in der Trägermitte eine entgegengesetzte Vorspannung wie am Auflager.

b) Beiderseits eingespannte Längsträger. Die Randbedingungen sind: $y_1 = y_2 = 0$ und $y_1^{(I)} = y_2^{(I)} = 0$ für $x=0$ und $x=l$. Damit ergibt sich

$$y_1 = 2\,\frac{J_2}{J_1}\,y_2$$

$$= \frac{2\,J_2}{J_1 + 2\,J_2}\,v\left\{1 - \frac{\mathfrak{Sin}\,\nu x\cos\nu x' + \mathfrak{Cof}\,\nu x\sin\nu x'}{\sin\nu l + \mathfrak{Sin}\,\nu l}\right.$$

$$\left. + \frac{\sin\nu x\,\mathfrak{Cof}\,\nu x' + \cos\nu x\,\mathfrak{Sin}\,\nu x'}{\sin\nu l + \mathfrak{Sin}\,\nu l}\right\}.$$

Die Momente in den Längsträgern werden

$$M_1 = 2\,M_2 = -E\,J_1\,y_1^{(II)}$$

$$= \frac{4\,E\,J_1\,J_2}{J_1 + 2\,J_2}\,v\,\nu^2\,\frac{\sin\nu x\,\mathfrak{Cof}\,\nu x' - \cos\nu x\,\mathfrak{Sin}\,\nu x}{\sin\nu l + \mathfrak{Sin}\,\nu l}$$

$$+ \frac{\mathfrak{Cof}\,\nu x\sin\nu x' - \mathfrak{Sin}\,\nu x\cos\nu x'}{\sin\nu l + \mathfrak{Sin}\,\nu l}.$$

Die Querkraft berechnet sich mit

$$Q_1 = 2\,Q_2 = -E\,J_1\,y_1^{(III)}$$

$$= \frac{8\,E\,J_1\,J_2}{J_1 + 2\,J_2}\,v\,\nu^3\,\frac{\cos\nu x\,\mathfrak{Cof}\,\nu x' - \mathfrak{Cof}\,\nu x\cos\nu x'}{\sin\nu l + \mathfrak{Sin}\,\nu l}.$$

Schließlich erhält man nach den Gl. (3) und (4)

$$p_1 = 2\,p_2 =$$

$$= \frac{8\,E\,J_1\,J_2}{J_1 + 2\,J_2}\,v\,\nu^4\,\frac{\mathfrak{Sin}\,\nu x\cos\nu x' + \mathfrak{Cof}\,\nu x\sin\nu x'}{\sin\nu l + \mathfrak{Sin}\,\nu l}$$

$$+ \frac{\sin\nu x\,\mathfrak{Cof}\,\nu x' + \cos\nu x\,\mathfrak{Sin}\,\nu x'}{\sin\nu l + \mathfrak{Sin}\,\nu l};$$

für $x = \frac{l}{2}$ folgt hieraus

$$p_{1,\min} = 2\,p_{2,\min} = \frac{16\,E\,J_1\,J_2}{J_1 + 2\,J_2}\,v\,\nu^4\,l,$$

wobei

$$l = \frac{\mathfrak{Sin}\,\frac{\nu l}{2}\cos\frac{\nu l}{2} + \mathfrak{Cof}\,\frac{\nu l}{2}\sin\frac{\nu l}{2}}{\sin\nu l + \mathfrak{Sin}\,\nu l}$$

ist. Der früher beschriebene Grenzfall tritt für die Lösungen der Gleichungen $l = 0$, d. i. für $\mathfrak{Tg}\,\frac{\nu l}{2} + \operatorname{tg}\frac{\nu l}{2} = 0$ auf, woraus man $\nu l = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \ldots$ findet.

IV. Anwendung. Die Fahrbahn einer Brücke bestehe aus vier gleichen eisernen Längsträgern mit dem Querschnitt *I* 26 ($\bar{J}_1 = \bar{J}_2 = 5740$ cm^4, $W = 442$ cm^3) in einer Entfernung von $e = 100$ cm, mit einer Stützweite von $l = 450$ cm und dem hölzernen Fahrbahnbelag $h = 16$ cm stark mit einer Vorspannung von $v = 0{,}8$ cm. Die Elastizitätszahl des Eisens sei $E = 2\,100\,000$ kg/cm^2 und jene des Holzes $E' = 110\,000$ kg/cm^2.

Unter der Annahme freiaufliegender Längsträger wurden nach den in (a) angegebenen Formeln die Einsenkungen, Biegungsmomente, Querkräfte und die Belastung gerechnet und ihr Verlauf entlang des Trägers in den Schaulinien der Abb. 5a

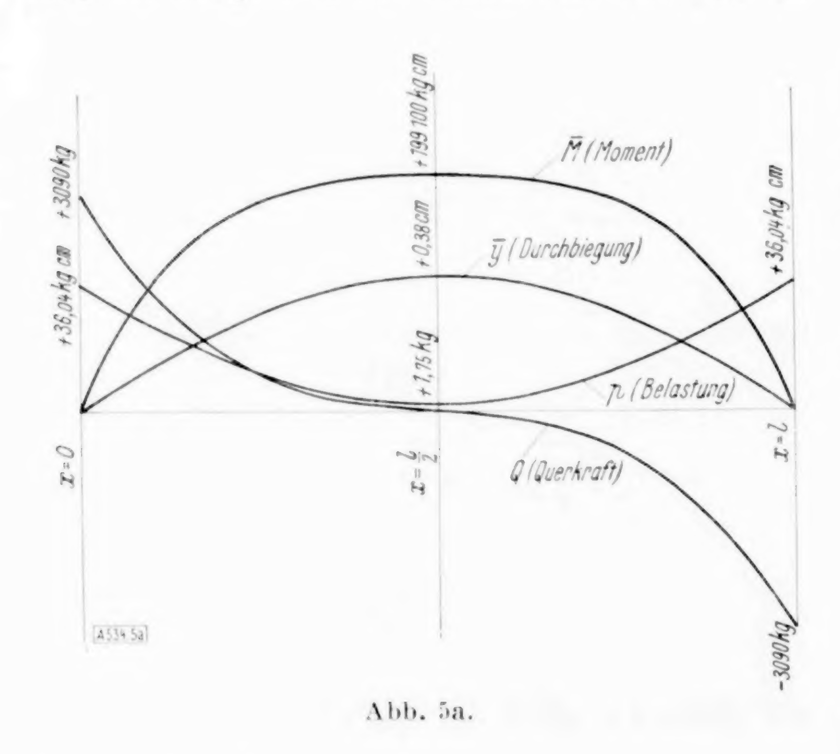


Abb. 5a.

dargestellt. Hiernach ist

$$\bar{y}_{1\cdot\max} = \bar{y}_{2\cdot\max} = \frac{1}{2}\cdot 0{,}8\cdot 0{,}951 = 0{,}380\ \text{cm},$$

$$\bar{M}_{1\cdot\max} = \bar{M}_{2\cdot\max}$$
$$= 0{,}8\cdot 1{,}205\cdot 10^{10}\cdot 43{,}231\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}4775$$
$$= 199\,100\ \text{kgcm}.$$

Die größten Biegungsmomente in den Längsträgern werden daher $\sigma_{\text{vorh}} = \frac{199\,100}{442} = 450{,}3$ kg/cm^2, d. i. 28,1 v. H. der zulässigen Spannung, wenn diese 1600 kg/cm^2 beträgt.

Für beiderseits eingespannte Längsträger gelten die unter (b) angegebenen Formeln und die danach in Abb. 5b dargestellten Schaulinien für die Einsenkungen, Biegungsmomente, Querkräfte und die Belastung. Demnach ist

$$\bar{y}_{1\cdot\max} = \bar{y}_{2\cdot\max} = \frac{1}{2}\cdot 0{,}8\cdot 0{,}492 = 0{,}197\ \text{cm},$$

$$\bar{M}_{1,\frac{l}{2}} = \bar{M}_{2,\frac{l}{2}}$$
$$= 0{,}8\cdot 1{,}205\cdot 10^{10}\cdot 43{,}231\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}4308$$
$$= 179\,600\ \text{kgcm},$$

$$\bar{M}_{1,0} = \bar{M}_{1,l} = \bar{M}_{2,0} = \bar{M}_{2,l}$$
$$= -0{,}8\cdot 1{,}205\cdot 10^{10}\cdot 43{,}231\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}9629$$
$$= -401\,400\ \text{kgcm}.$$

Die Biegespannung in Längsträgermitte beträgt dann $\sigma_{\text{vorh}} = \frac{179\,600}{442} = 405{,}6$ kg/cm^2 und an den Auflagern $\sigma_{\text{vorh}} = \frac{401\,400}{442} = 907{,}1$ kg/cm^2, d. i. 56,7 v. H. bzw. 25,3 v. H. der zulässigen Biegespannung.

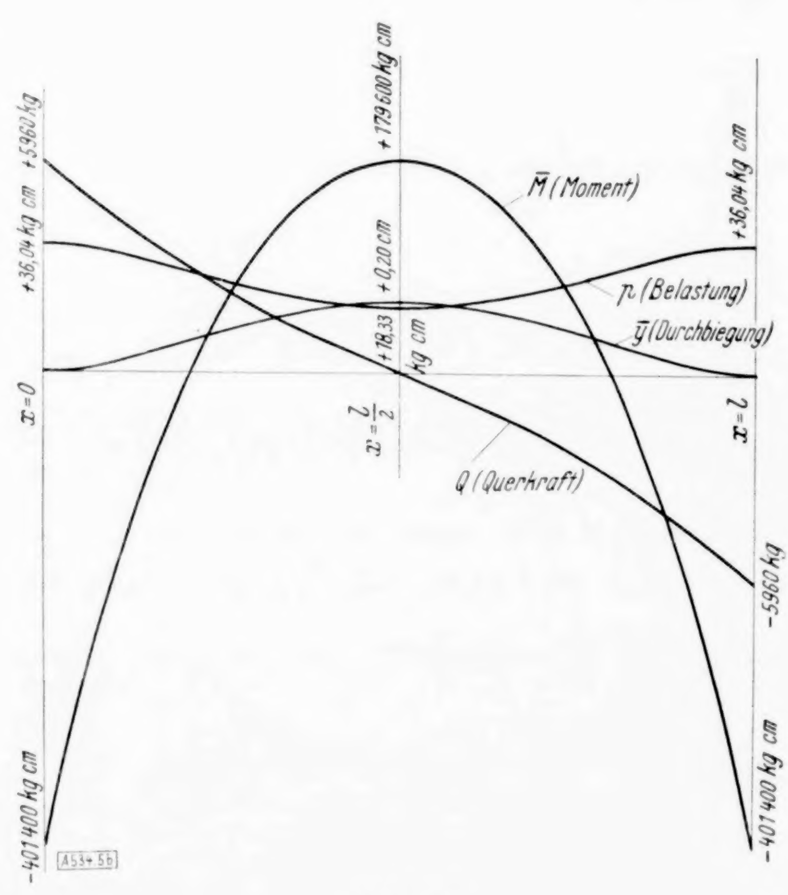


Abb. 5b.

V. Zusammenfassung. Aus dem angeführten Beispiele erkennt man, daß die Vorspannung des Fahrbahnbelages eine beträchtliche Mehrbeanspruchung der Fahrbahnlängsträger zur Folge hat. Es können mithin auch schon größere Höhenunterschiede der Längsträgeroberkanten, als Folge von Montagefehlern, beachtliche zusätzliche Spannungen ergeben.

Da die durchgeführte Berechnung auf der Annahme einer festen Verbindung zwischen Fahrbahnbelag und Fahrbahnlängsträger beruht, so werden ihre Ergebnisse um so zutreffender sein, je besser diese Voraussetzung praktisch erfüllt ist. Es wird sich demnach der untersuchte Einfluß bei Ausführung eines eisernen Fahrbahnbelages stärker äußern als bei einem Holzbelag.

Graz. Fritz Reinitzhuber. 534

Über die Grenzen der Anwendbarkeit einer Formel der Festigkeitslehre. In einer Abhandlung über Stabilität rotierender achsial belasteter Wellen (5. Bd. dieser Zeitschrift) gibt E. Schwerin unter anderem die genaue Lösung der Aufgabe über das relative Gleichgewicht einer gestützten biegsamen Welle unter Einwirkung der Fliehkraft einer in ihrer Mitte befestigten Masse und zweier achsial gerichteter Kräfte. Man kann diese Lösung für folgende zwei Aufgaben anwenden:

1. Biegung einer rotierenden biegsamen Welle, die durch eine in ihrer Mitte befestigte Masse belastet ist und in Sellerslagern läuft, und
2. Biegung eines Stabes, der auf zwei glatte Widerlager gestützt ist und unter Einwirkung einer in ihrer Mitte beigefügten Einzellast steht (wobei sein eigenes Gewicht nicht in Betracht gezogen wird).

Da die Formeln des Verfassers eine genaue Lösung geben, wird es nicht ohne Interesse sein, die Zahlenwerte für die zweite der beiden Aufgaben mit den durch die angenäherten Formeln der Festigkeitslehre gegebenen Ergebnissen zu vergleichen.

Setzen wir:

$2l$ — die Entfernung zweier Lager voneinander,
f — der Pfeil in der Mitte des Stabes,
α — der Winkel, den die Tangente in dem Stützpunkt mit der Richtung des nicht gebogenen Stabes bildet,
P — die Einzellast,
EJ — die Steifigkeit des Stabes,
F — und E elliptische Integrale erster und zweiter Gattung in Legendre-Jakobischer Normalform,
$\mathbf{K}$ — und $\mathbf{E}$ dieselben vollständigen Integrale.

So haben wir

$$\frac{f}{l} = \lambda(\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \Psi(\alpha)}{1 + \operatorname{tg}\alpha\,\Psi(\alpha)} \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

wo

$$\Psi(\alpha) = \frac{\Phi(\alpha)}{\sqrt{2\sin\alpha}},$$

$$\Phi(\alpha) = F(\arcsin\sqrt{1-\sin\alpha},\, k) - 2E(\arcsin\sqrt{1-\sin\alpha},\, k) - \mathbf{K} + 2\mathbf{E}.$$

$$\left(k^2 = \frac{1}{2}\right)$$

und

$$l\sqrt{A} = \frac{\sin\alpha\sqrt{\cos\alpha}}{\sqrt{2}}\left\{\frac{\sqrt{2\cos\alpha}}{\sqrt{\sin\alpha}} + \Phi(\alpha)\right\} \quad . \quad . \quad (2),$$

wo

$$A = \frac{P}{4EJ}.$$

Auf Grund der (2) können wir für $\frac{f}{l}$ auch den Ausdruck

$$\frac{f}{l} = \frac{\sqrt{\operatorname{cotg}\alpha}}{l\sqrt{A}} - \operatorname{cotg}\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

erhalten.

Die Formeln der Festigkeitslehre lauten:

$$f_1 = \frac{P\,l^3}{6EJ} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{P\,l^2}{4EJ},$$

oder unter Einsetzen der obenerwähnten Beziehungen

$$\frac{f_1}{l} = \frac{2}{3}A\,l^2, \quad \operatorname{tg}\alpha_1 = A\,l^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Wenn wir dem Winkel α eine Reihe aufeinanderfolgender Werte geben, so wird (2) die entsprechende Reihe der Werte von $l\sqrt{A}$ bestimmen, und aus (3) und (4) erhalten wir folgende Tabelle:

Zahlentafel 1.

α	$l\sqrt{A}$	α_1	Fehler in v. H. ausgedrückt	$\frac{f}{l}$	$\frac{f_1}{l}$	Fehler in v. H. ausgedrückt
2°	0,18672	1° 59′8	0,17	0,023282	0,023243	0,16
4°	0,26358	3° 58′	0,8	0,04656	0,04632	0,5
6°	0,32183	5° 55′	1,4	0,06991	0,06905	1,2
8°	0,37003	7° 48′	2,5	0,09334	0,09128	2,2
10°	0,41144	9° 36′	4,0	0,11686	0,11285	3,4
12°	0,44767	11° 20′	5,6	0,14050	0,13361	4,9
14°	0,47968	12° 57′	7,5	0,16429	0,15339	6,6
15°	0,49429	13° 44′	8,4	0,17626	0,16288	7,6
20°	0,55542	17° 9′	14	0,23682	0,20566	13
25°	0,59929	19° 45′	21	0,29906	0,23943	20
30°	0,62807	21° 32′	28	0,36338	0,26298	28
35°	0,64297	22° 28′	36	0,43049	0,27561	36
40°	0,64504	22° 35′	44	0,50067	0,27738	45
45°	0,63493	21° 57′	51	0,57498	0,26875	53
50°	0,61335	20° 37′	59	0,65438	0,25080	62

Im Falle einer rotierenden Welle haben wir

$$C\,l^3 = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\lambda(\alpha)\,(1 + \lambda(\alpha)\operatorname{tg}\alpha)^2},$$

wo

$$C = \frac{m\,\omega^2}{4EJ}.$$

Zahlentafel 2.

α	$C\,l^3$	α	$C\,l^3$
2°	1,49891	20°	1,30250
4°	1,49136	25°	1,20087
6°	1,48153	30°	1,08555
8°	1,46701	35°	0,96034
10°	1,44826	40°	0,83106
12°	1,42677	45°	0,70111
14°	1,40042	50°	0,57489
15°	1,38619		

Mit Hilfe dieser Zahlentafel können wir nach den gegebenen Werten von l, m, ω und EJ den Winkel α und schließlich aus der ersten Zahlentafel auch das Verhältnis $\frac{f}{l}$ bestimmen.

Beiläufig will ich bemerken, daß die Lösung der Aufgabe über die Biegung der rotierenden Welle, die in der Abhandlung von Dr. Malkin (Math. Ann. Bd. 101, 1929) angeführt ist, nicht genau ist. Die von ihm angewandten Formeln von Saalschütz entsprechen dem Falle, wo die Länge des Stabes, nicht aber der Abstand der Lager voneinander, konstant ist; sie sollen durch diejenigen von E. Schwerin in dem obenerwähnten Sonderfalle ersetzt werden.

Leningrad. C. Melikov. 532

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr. phil. I. **MALKIN,** Ingenieur der Westinghouse Electric and Manufacturing Co., Philadelphia, Festigkeitsberechnung rotierender Scheiben. VI + 100 S. Mit drei Zahlentafeln und 32 Abb. Berlin 1935, Verlag Julius Springer. Preis 10 M.

Das Buch gibt eine Übersicht über die Methoden zur Berechnung der Beanspruchung und Formänderung rotierender Scheiben. Nach einleitenden Bemerkungen über die exakte, zweidimensionale Behandlung des Problems und die hierfür bekannten Lösungen formuliert der Verfasser das Problem in der üblichen eindimensionalen Form. Im zweiten Kapitel werden die beiden elementar integrablen, für die praktisch wichtigen Fragestellungen charakteristischen Fälle der undurchbohrten Scheibe gleicher Festigkeit und der Scheibe konstanter Dicke vorausgeschickt und dann die zeichnerischen Integrationsverfahren (Stodola, Donath, Grammel) dargestellt. Es folgen die allgemeinen Integrationsmethoden (Ritzsches Verfahren und Reihenentwicklungen, Kap. 3) und die relativ einfach integrierbaren Fälle für besondere Scheibenformen (hyperboloidische, konische, Exponentialscheibenform). In einem abschließenden Kapitel werden „Nebenfragen der Scheibenberechnung" besprochen.

Das Buch ist leicht lesbar geschrieben; etwas störend wirken die häufigen Rückverweisungen, besonders weil dabei nur die Nummern der Formeln und Abbildungen, aber nicht die Seitenzahlen angegeben sind. Es wäre besser, wichtige Formeln nötigenfalls zu wiederholen. — In mathematischer Hinsicht könnte manches präziser formuliert werden. Die Zusammensetzung der allgemeinen Lösung einer Differentialgleichung aus Partikularlösungen wird zwar auf S. 21 erwähnt, aber es sollte ausdrücklich hervorgehoben werden, daß man bei gegebenen Spannungen am Außenrande stets mit der Konstruktion von zwei Partikularlösungen auskommt, und es sollte gezeigt werden, wie diese zur Erfüllung der Randbedingung am Innenrande kombiniert werden. Für das zeichnerische Verfahren von Grammel wird das zwar auf S. 42 dargestellt, erscheint aber dort als eine Art Kunstgriff; im Schlußabsatz auf S. 35 wird sogar statt des Aufbaues aus zwei Lösungen ein Probieren vorgeschlagen. — Die Begründung des Verfahrens von Ritz ist unzureichend; es wäre am einfachsten, der Verfasser schriebe das Minimalintegral (S. 48, Nr. 52) zweimal an, einmal für die Lösung u der Differentialgleichung, dann für eine Funktion $u + \delta u$ und zeigte mit der üblichen partiellen Integration, daß das Integral im zweiten Falle stets größer wird als im ersten. Dann sieht man auch, daß bei gegebenen Randspannungen in dem Minimalausdruck zu dem Integral noch ein von den Grenzen herrührender Anteil hinzukommt, daß dafür aber der Ritzsche Ansatz die Randbedingungen nicht zu befriedigen braucht. Was der Verfasser darstellt, ist das Minimalprinzip für gegebene Randverschiebungen. Angesichts der Tatsache, daß das Ritzsche Verfahren für die Scheibenberechnung weniger wichtig ist, könnte man es vielleicht weglassen; auch sonst wäre unter dem Gesichtspunkte der praktischen Anwendbarkeit die eine oder andere Kürzung möglich.

Trotz dieser kritischen Bemerkungen sei hervorgehoben, daß das Buch eine gute Übersicht über die Probleme und Methoden der Scheibenberechnung liefert. Auch die zur Erleichterung der Zahlenrechnung beigegebenen Zahlentafeln sind nützlich.

Trefftz. 575

Dr. Ing. F. **BOŠNIAKOVIĆ,** a. o. Professor an der Universität Belgrad, Technische Thermodynamik. I. Teil. Wärmelehre und Wärmewirtschaft in Einzeldarstellungen. Band XI. XII + 202 + 16 S. Mit 176 Abb. und 3 Tafeln. Dresden und Leipzig 1935, Verlag von Theodor Steinkopf. Preis geb. 14 M.

Das Buch behandelt die Grundlagen und die Anwendungen der technischen Thermodynamik. Der Inhalt gliedert sich in die folgenden Abschnitte: Temperaturmessung und Wärmegleichgewicht. Erster Hauptsatz. Zweiter Hauptsatz. Verdampfung und Verflüssigung. Strömungsvorgänge. Kältemaschinenprozesse. Die Entwicklung der Grundlagen der Thermodynamik ist klar, präzise und verständlich, die Darstellung der technischen Prozesse anschaulich, die Wahl der Anwendungsbeispiele in der beigegebenen Aufgabensammlung instruktiv. Das Buch ist als Lehrbuch für den Studenten und den akademisch vorgebildeten Praktiker gedacht und wird als solches sehr gute Dienste leisten. Außer diesem unmittelbaren Interessentenkreise seien besonders die technischen Physiker und angewandten Mathematiker, die sich für die Anwendung der Physik in der Technik interessieren, auf das Buch hingewiesen. Die Darstellungsweise, die Anschaulichkeit und strenge Deduktion vereinigt, wird ihnen zusagen.

Trefftz. 575

Dr. GEORG **JOOS,** o. ö. Prof. a. d. Univ. Jena, Lehrbuch der Theoretischen Physik. 2. Aufl. XVI + 676 S. m. 164 Fig. Leipzig 1934, Verlag Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. Preis 24 M.

Die Tatsache, daß das Joossche Lehrbuch der theoretischen Physik schon nach relativ kurzer Zeit in zweiter Auflage erscheint, beweist, daß dem Verfasser das gelungen ist, was bei einem Lehrbuch vielleicht das Wichtigste ist, nämlich: den Beifall der Leser zu finden. Das liegt zunächst an der Stoffauswahl, die die in den einzelnen Teilen der theoretischen Physik wesentlichen Kenntnisse vermittelt und ihm damit die Grundlage für ein eingehenderes Studium an Hand von Spezialwerken liefert; zum anderen an der Darstellungsweise, die, vom Experiment ausgehend, die Theorie entwickelt, ohne allzu hohe Anforderungen an die Kenntnisse des Lesers zu stellen. Das Buch kann nicht nur den Studenten der Experimentalphysik und der technischen Physik, für die es in erster Linie geschrieben ist, empfohlen werden, sondern auch dem Ingenieur, der sich gegebenenfalls in den einzelnen Fragen der theoretischen Physik zu unterrichten wünscht.

Trefftz. 575

W. **HEISENBERG,** E. **SCHRÖDINGER,** P. A. M. **DIRAC,** Die moderne Atomtheorie. Die bei der Entgegennahme des Nobelpreises 1933 in Stockholm gehaltenen Vorträge. 45 S. u. 6 Fig. Leipzig 1934, Verlag von S. Hirzel. Preis kart. 2,50 M.

In dem ersten der drei Vorträge berichtet Heisenberg über die Entwicklung der Quantenmechanik und geht kurz auf die Frage ein, welche Hoffnungen man an die weitere Entwicklung dieses Forschungszweiges knüpfen kann. Schrödinger spricht weiter in sehr anschaulicher Weise über die Grundgedanken der Wellenmechanik und ihre begrifflichen Schwierigkeiten. Dirac endlich behandelt die Theorie der Elektronen und Positronen und zeigt insbesondere, wie man die Spineigenschaften des Elektrons ableiten kann, und wie man auf die Existenz von Positronen mit gleichartiger Spineigenschaft und mit der Fähigkeit, durch Zusammenstoß mit Elektronen vernichtet zu werden, schließen kann.

Freiberg (Sa.). Fr. A. Willers. 528

Archiv für mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung. Unter Mitwirkung von Prof. Dr. Felix Burkhardt, Privatdozent Dr. Hans Peter, Privatdozent Dr. Erich Schneider, Privatdozent Dr. v. Stackelberg herausgegeben von Prof. Dr. Aloys TIMPE und Prof. Dr. Paul RIEBESELL. Jährlich 1 Bd. in 3 Heften. Leipzig, Verlag Hans Buske. Bd. 1, Heft 1, 1935. Preis des Bandes 10 M.

Obwohl Lexis, dessen Buch „Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft" 1877 in Straßburg erschien, einer der ersten war, der wahrscheinlichkeitstheoretische Methoden auf soziale Probleme anwandte, ist das Interesse für Anwendung mathematischer Denkformen und Methoden auf soziale und wirtschaftliche Probleme erst in neuerer Zeit in Deutschland allgemeiner geworden. Dieses Interesse wachzuhalten und zu pflegen und durch Förderung der Zusammenarbeit die vielfältigen Probleme des wirtschaftlichen und sozialen Lebens einer Lösung näherzubringen, hat sich das „Archiv für mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung", dessen erstes Heft jetzt vorliegt, zur Aufgabe gemacht. Es will eine Sammelstelle werden für Arbeiten aus dem Gebiet der Finanzmathematik einschließlich Bau- und Zwecksparmathematik, Versicherungsmathematik, Großzahlforschung in Anwendung auf wirtschaftliche und soziale Probleme, Tarifmathematik, Standortlehre, betriebswirtschaftliche Erfolgsrechnung und Bilanzierungswissenschaft, betriebswirtschaftliche Statistik, Kostentheorie, mathematische Methoden der Markt- und Konjunkturforschung, der theoretischen Nationalökonomie, der volkswirtschaftlichen und Sozialstatistik, der Verwaltungslehre, der Bevölkerungslehre und der Rassenkunde. Dabei sollen nicht nur Aufsätze, die neue Forschungsergebnisse bringen, aufgenommen werden, sondern auch solche, die den Praktiker mit der Anwendung mathematischer Methoden bekannt machen. Beide Arten von Arbeiten finden sich im ersten Heft, das folgende Aufsätze enthält: Peter, Aufgaben und Grenzen der mathematischen Nationalökonomie; Riebesell, Gibt es eine Sachversicherungsmathematik?; Schneider, Arbeitszeit und Produktion; Münzer, Über die Schnelligkeit der Rassenvermischung; Keller, Mathematische Probleme in der Verkehrsstatistik. Eine ausführliche Übersicht über einschlägige Aufsätze in der Zeitschriftenliteratur und Besprechungen neuerschienener Bücher schließen das Heft.

Freiberg (Sa.). Fr. A. Willers. 528

Dr.-Ing. F. **MOELLER** und Dipl.-Ing. **TH. WERR**, Elektrotechnik. (Ein Leitfaden für Studium und Praxis, hrsg. von Dr.-Ing. G. Bolz, Berlin, Dr.-Ing. F. Moeller, Berlin, Dipl.-Ing. Th. Werr, München.) Bd. II, Teil 3 und 4, Gleich- und Wechselstrommaschinen. VIII + 125 S. m. 176 Abb. Leipzig und Berlin 1935, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 10 M.

Das Buch behandelt den Aufbau, die Wirkungsweise, die Schaltungen und die Betriebseigenschaften der Gleich- und Wechselstrommaschinen für Erzeugung, Umformung und Antrieb.

Es ist den Verfassern gelungen, durch eine klare, leicht verständliche Darstellung ohne Anforderung an große mathematische Vorkenntnisse die Grundzüge und die praktisch bedeutungsvollen Eigenschaften herauszuarbeiten. Dabei werden Studium und Verständnis wesentlich durch die Abbildungen neuzeitlicher Maschinen, durch die klaren Schaltbilder, die sich in weitgehendem Maße an die DIN-VDE-Normen und an die Festsetzungen des AEF halten, durch eine reichliche Einstreuung praktischer Beispiele und nicht zuletzt durch die farbige Darstellung der Wechselstromgrößen in den Kurvenbildern und Diagrammen gefördert. Zu begrüßen ist ferner, daß auch die REM-, RET-, REB- und die anderen einschlägigen VDE-Bestimmungen nicht nur berücksichtigt werden, sondern daß auch auf diese immer wieder erläuternd hingewiesen wird. Damit wird die angestrebte Einheitlichkeit in der gesamten Elektrotechnik gefördert und der Anschluß an das grundlegende VDE-Vorschriftenbuch und an die anderen Taschenbücher gefunden.

Das Buch kann jedem Studierenden und Ingenieur empfohlen werden, da es eine gute Vorbereitung für die Praxis und das Studium von Spezialwerken des Elektromaschinenbaus vermittelt. Darüber hinaus kann es aber auch jedem anderen Studierenden, Ingenieur und Techniker, denen Lehrplan und Beruf eine nähere Beschäftigung mit den elektrischen Maschinen auferlegt, zur ausreichenden Schulung und Aufklärung dienen.

Die vorzügliche Ausstattung des Buches verdient beachtet zu werden.

Freiberg (Sa.) W. Krug VDE. 574

ERNST AUGUST **WEISS**, a. o. Prof. a. d. Rhein. Friedrich-Wilhelm-Universität Bonn, Einführung in die Liniengeometrie und Kinematik. (Teubners Mathematische Leitfäden. Bd. 41.) VI + 122 S. Leipzig und Berlin 1935, Verlag B. G. Teubner. Preis kart. 7,60 M.

„Liniengeometrie ist nach Felix Klein die Geometrie einer quadratischen Mannigfaltigkeit in einem Raum von 5 Dimensionen, Kinematik — die Geometrie mit der Bewegung als Raumelement —, nach Eduard Study die Geometrie einer quadratischen Mannigfaltigkeit in einem Raume von 7 Dimensionen. Die Geometrie mehrdimensionaler Räume wird so auf zwei verschiedene Weisen mit der Geometrie des dreidimensionalen Raumes aufs engste verknüpft. Der vorliegende Leitfaden gibt eine Einführung in die Liniengeometrie und Kinematik auf der Grundlage dieser Verknüpfung." Diesem Plan folgt der Verfasser; auf den Plückerschen Linienkoordinaten aufbauend und in der Weitzenböckschen Komplexsymbolik ein wirksames Hilfsmittel bereitstellend, führt er den Kleinschen Gedanken durch und erweitert ihn zu der Darstellung, die Study für die Liesche Geraden-Kugel-Transformation und die Strahlengeometrie gefunden hat; er schließt mit einer Behandlung der Kinematik, die sich insbesondere auf eine Vorlesung Studys aus dem Jahr 1926 stützt. So leitet das Buch den Leser zu Studys Gedankenwelt, aus der es seinen Blickpunkt empfängt.

Dresden. W. Ludwig. 578

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Dr.-Ing. M. **EWEIS**, Reibungs- und Undichtigkeitsverluste an Kolbenringen. (Forschungsheft 371, Beilage zu „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens", Ausg. B, Bd. 6, März/April 1935.) 23 S. m. 37 Abb. und 3 Zahlentafeln. Berlin 1935, VDI-Verlag m. b. H. Preis 5 M.

Dr.-Ing. habil. F. **WEINIG**, Dozent an der Techn. Hochschule Berlin, Die Strömung um die Schaufeln von Turbomaschinen. VIII + 142 S. m. 120 Abb. Leipzig 1935, Verlag von J. A. Barth. Preis geb. 17,50 M.

Verein Deutscher Ingenieure, Sonderheft Luftfahrt. IV + 132 S. mit 315 Abb. und 27 Zahlentafeln. Berlin 1936, VDI-Verlag. Preis 6 M.

Geh. Rat Prof. Dr. PH. **LENARD**, Heidelberg, Deutsche Physik in vier Bänden. Bd. I, Einleitung und Mechanik. XV + 249 S. mit 113 Abb. München 1936, Verlag J. F. Lehmann. Preis geb. 10 M.

H. **HAEGER,** VDI, Ziv.-Ing., Statik in Bild und Gleichung. VIII + 57 S. mit 140 Abb. und 80 Taf. Berlin 1935, VDI-Verlag. Preis 48 M.

ALFRED A. **ROBB,** Sc. D., D. Sc., Ph. Dr., F. R. S., Geometry of Time and Space. VIII + 408 S. mit 57 Abb. Cambridge 1936, University Press. Preis Sh. 21,—.

D. **KÖNIG,** a. o. Prof. a. d. kgl. ungarischen Josefs-Universität für Technik und Wirtschaftswissenschaften in Budapest, Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Bd. 16 der Sammlung: Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern, begr. von E. Hilb, hrsg. von E. Artin. XI + 258 S. mit 107 Abb. Leipzig 1936, Akademische Verlagsgesellschaft. Preis geb. 18 M.

P. **ALEXANDROFF,** Prof. a. d. Universität Moskau, und H. **HOPF,** Prof. a. d. eidgen. techn. Hochschule Zürich, Topologie. Bd. 1. Bd. 45 der Sammlung: Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, hrsg. v. R. Courant, W. Blaschke, F. K. Schmidt und B. L. Van der Waerden. XIV + 636 S. mit 39 Abb. Berlin 1936, Verlag J. Springer. Preis geb. 46,80 M.

E. **MADELUNG,** o. Prof. d. Theoret. Physik a. d. Univ. Frankfurt a. M., Die mathematischen Hilfsmittel des Physikers (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. IV). XIII + 381 S. m. 25 Textfig. 3., verbess. und verm. Aufl. Berlin 1936, Verlag Julius Springer. Preis geb. 28,80 M.

Verhandlungen der in Tallinn und Tartu vom 20. bis 23. August 1935 abgehaltenen achten Tagung der Baltischen Geodätischen Kommission, redigiert vom Generalsekretär Ilmari Bonsdorff. 296 S. Helsinki 1936, Osakeyhtiö Weilin & Göös Aktiebolag.

Handbuch der Vermessungskunde von weil. Dr. phil. h. c. W. Jordan, Prof. a. d. Techn. Hochsch. zu Hannover, fortgesetzt von weil. Dr. C. Reinhertz, Prof. a. d. Techn. Hochsch. zu Hannover. I. Bd. Ausgleichungs-Rechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 8., erweit. Aufl., bearb. von Dr.-Ing. e. h. O. Eggert, Prof. a. d. Techn. Hochsch. zu Berlin. VIII + 632/(24) S. m. zahlreichen Abb. Stuttgart 1935, J. B. Metzlersche Verlagsbuchh. Preis geb. 30 M.

VDI-Jahrbuch 1936, die Chronik der Technik. Hrsg. im Auftrage des Vereins deutscher Ingenieure von A. Leitner VDI. 192 S. Berlin 1936, VDI-Verlag G. m. b. H. Preis 3,50 M.

Abhandlungen. Bd. III: Internat. Vereinigung für Brückenbau und Hochbau. Hrsg. v. Generalsekretariat in Zürich. VIII + 438 S. Zürich 1935, Verlag A.-G. Gebr. Leemann & Co. Preis brosch. 30 sfr.

Dr. HARRY **SCHMIDT,** Prof. a. d. Staatl. Hochschule für angewandte Technik, Köthen, nichtplanm. a. o. Prof. a. d. Univ. Leipzig, Einführung in die Vektor- und Tensorrechnung unter besonderer Berücksichtigung ihrer physikalischen Bedeutung. VI + 125 S. mit 20 Abb. Leipzig 1935, Verlag Dr. Max Jänecke. Preis 5,80 M.

NACHRICHTEN

80 Jahre Verein deutscher Ingenieure.

Die 74. Hauptversammlung des Vereines deutscher Ingenieure, die Feier seines 80jährigen Bestehens, findet vom 26. bis 29. Mai 1936 in Darmstadt in Verbindung mit der Hundertjahrfeier der dortigen Technischen Hochschule statt. Die dem Verein deutscher Ingenieure angeschlossenen Vereinigungen: Automobil- und Flugtechnische Gesellschaft, Verein deutscher Heizungs-Ingenieure und Verein deutscher Revisions-Ingenieure führen ihre diesjährigen Hauptversammlungen in Verbindung mit den Veranstaltungen des Vereines deutscher Ingenieure in Darmstadt, der Deutsche Kälteverein in Karlsruhe durch.

Den Schwerpunkt der Hauptversammlung bilden die am 26. und 27. Mai stattfindenden technischen Fachvorträge. In sechs Vortragsgruppen

Ingenieuraufgaben bei der Erhaltung der Nahrungs- und Rohstoff-Freiheit des deutschen Volkes,
Verfahrenstechnik und ihre Auswirkungen auf Gestaltung und Herstellung,
Energiewirtschaftsfragen,
Schutz von Mensch und Sache,
Ingenieur und Volkswirtschaft,
Kultur und Technik

zusammengefaßt, behandeln sie wichtige Arbeitsgebiete des Vereines.

Am Donnerstag, dem 28. Mai, wird im Anschluß an die geschäftliche Hauptversammlung des VDI eine Feierstunde dem 100jährigen Bestehen der Technischen Hochschule Darmstadt und der 80-Jahrfeier des Vereines deutscher Ingenieure gewidmet sein. Gesellige Veranstaltungen an den Abenden des 26. und 28. Mai dienen der Pflege der Kameradschaft. Am 29. Mai führen Besichtigungen und Ausflüge in die Umgebung von Darmstadt.

Internationaler Mathematiker-Kongreß in Oslo.

Vom 13. bis 18. Juli d. J. findet in Oslo, Norwegen, der Internationale Mathematikerkongreß statt. Für die Einzelgebiete mathematischer Forschung sind die folgenden Abteilungen vorgesehen: I. Algebra und Zahlentheorie, II. Analysis, III. Geometrie und Topologie, IV. Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik, Versicherungsmathematik und Ökonometrie, V. Mathematische Physik, Astronomie und Geophysik, VI. Mechanik und Ingenieurwissenschaften, VII. Logik, Philosophie und Geschichte, VIII. Pädagogik. — Im Rahmen des Kongresses wird die Internationale Mathematische Unterrichtskommission tagen. Der Preis der Teilnehmerkarte beträgt 40, für Familienangehörige 20 norweg. Kronen. Anmeldungen zur Teilnahme sind baldmöglichst an das Kongreßsekretariat zu richten. Anschrift: Internationaler Mathematikerkongreß, Universitetet, Blindern, Oslo, Norwegen. — Ausführlichere Mitteilungen über das Programm werden im nächsten Heft dieser Zeitschrift erfolgen.

Ich bitte, von der Änderung meiner Anschrift Kenntnis zu nehmen. Dieselbe ist ab 1. April 36: Prof. Dr. E. Trefftz, Dresden-A. 20, Cäcilienstr. 6.

Für den Textteil verantwortlich: Professor Dr. E. Trefftz, Dresden-A. 20, Cäcilienstr. 6. — Printed in Germany. —
 — Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.